L'Année Psychologique, 1988, *88*, 395-403

NOTE

Groupe mathématiques et psychologie
CNRS, URA 2
Université René-Descartes[1]

L'ANALYSE DES COMPARAISONS A PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ COMME PROLONGEMENT DES PROCÉDURES ÉLÉMENTAIRES

par Bruno LECOUTRE

SUMMARY : The analysis of several degrees of freedom comparisons as an extension of elementary procedures.

This paper extends to several degrees of freedom comparisons the article of Hoc (1985), which showed how the analysis of one degree of freedom comparisons can be viewed as a direct extension of elementary statistical procedures, descriptive as well as inferential.

Key words : analysis of variance, analysis of comparisons, specific inference.

INTRODUCTION

Lecoutre (1983) et Hoc (1985) ont illustré la manière dont l'analyse de la variance pouvait être présentée, en ce qui concerne l'analyse des comparaisons à un degré de liberté, comme un prolongement direct des procédures élémentaires, tant descriptives (moyennes, écarts-types) qu'inférentielles (le « t de Student »). Ces articles pourraient laisser penser qu'une telle présentation ne s'applique pas aux comparaisons à plusieurs degrés de liberté, et que ces dernières nécessitent le recours à l'analyse de la variance traditionnelle, avec ses difficultés bien connues, dont le *hiatus* entre les statistiques considérées (sommes-des-carrés, carrés-moyens) et les procédures descriptives « naturelles » n'est pas la moindre. Nous nous proposons de montrer ici qu'il n'en est rien, et que les mêmes principes — *dérivation* des données pertinentes et

1. 12, rue Cujas, 75005 Paris.

inférence spécifique (cf. Rouanet et Lecoutre, 1983) — s'appliquent à toutes les comparaisons, en généralisant encore les procédures élémentaires, dans le cas de plusieurs degrés de liberté. Ces principes permettent en outre d'expliciter facilement les conditions de validité des inférences effectuées dans un plan complexe. Nous les illustrerons ici à propos d'un plan de structure $S \langle G \rangle * T$ (« Sujets » emboîtés dans les « Groupes » G et croisés avec les « Traitements » T) ; la démarche est à valeur générale pour des facteurs G et T composés quelconques de facteurs élémentaires (même si nous nous limitons ici à un exemple simple où G et T sont élémentaires).

EXEMPLES NUMÉRIQUES

Nous considérerons à titre d'illustration un plan $S_4 \langle G_3 \rangle * T_3$; les données et le tableau traditionnel de l'analyse de la variance sont présentés dans les tableaux I et II.

TABLEAU I. — *Exemple numérique, plan* $S_4 \langle G_3 \rangle * T_3$: *données de base et protocoles dérivés*

Numerical example, $S_4 \langle G_3 \rangle * T_3$ design : basic data set and derived protocols

		données de base			protocole dérivé par moyennage sur T	protocoles dérivés par contraste sur T		
		t1	t2	t3		t1,t2	t2,t3	t3,t1
g1	s1	4	2	6	4.0000	+2	−4	+2
	s2	5	4	6	5.0000	+1	−2	+1
	s3	4	6	7	5.6667	−2	−1	+3
	s4	5	5	7	5.6667	0	−2	+2
				moyennes	*5.0833*	*+0.2500*	*−2.2500*	*+2.0000*
				écarts-types-corrigés	*0.7876*	*1.7078*	*1.2583*	*0.8165*
g2	s5	1	3	6	3.3333	−2	−3	+5
	s6	3	4	4	3.6667	−1	0	+1
	s7	3	3	7	4.3333	0	−4	+4
	s8	7	2	3	4.0000	+5	−1	−4
				moyennes	*3.8333*	*+0.5000*	*−2.0000*	*+1.5000*
				écarts-types-corrigés	*0.4303*	*3.1091*	*1.8257*	*4.0415*
g3	s9	2	5	5	4.0000	−3	0	+3
	s10	6	2	5	4.3333	+4	−3	−1
	s11	3	4	3	3.3333	−1	+1	0
	s12	3	3	7	4.3333	0	−4	+4
				moyennes	*4.0000*	*0*	*−1.5000*	*+1.5000*
				écarts-types-corrigés	*0.4714*	*2.9439*	*2.3805*	*2.3805*

TABLEAU II. — *Tableau traditionnel de l'analyse de la variance*

Traditional ANOVA table

Comparaison	d.l.	somme-des-carrés	carré-moyen	Rapport F
G	2	11.0556	5.5278	5.3783
S(G)	9	9.2500	1.0278	
T	2	26.0556	13.0278	4.3028
G.T	4	0.7778	0.1944	0.0642
S(G).T	18	54.5000	3.0278	

Comparaison G

La démarche généralise celle que l'on suivrait si le facteur G n'avait que deux modalités. On considère les moyennes et les écarts-types-corrigés du protocole *dérivé par moyennage* sur T (voir tableau I). L'étape essentielle consiste ensuite à caractériser numériquement la *grandeur de l'effet observé* de la comparaison G. Il apparaît naturel pour cela de partir des effets des trois comparaisons partielles (à 1 d.l.) g_1, g_2, g_2, g_3 et g_3, g_1 qui opposent les groupes deux à deux, c'est-à-dire des trois différences :

$$g_1, g_2 : 5{,}0833 - 3{,}8333 = +\ 1{,}2500$$
$$g_2, g_3 : 3{,}8333 - 4{,}0000 = -\ 1{,}6667$$
$$g_3, g_1 : 4{,}0000 - 5{,}0833 = -\ 1{,}0833.$$

Un *indicateur numérique* de la grandeur de l'effet de la comparaison G est fourni par la *moyenne quadratique* (*i.e.* la racine-carrée de la moyenne des carrés des valeurs) de ces trois effets partiels, soit :

$$l = \sqrt{\frac{1{,}2500^2 + 0{,}1667^2 + 1{,}0833^2}{3}} = 0{,}9598.$$

On retient également la moyenne quadratique des écarts-types-corrigés de chacun des trois groupes, le modèle usuel *(« équivarié »)* postulant l'homogénéité des trois écarts-types parents :

$$s = \sqrt{\frac{0{,}7876^2 + 0{,}4303^2 + 0{,}4714^2}{3}} = 0{,}5853.$$

S'il n'y avait que deux groupes, on serait ramené au problème élémentaire de la comparaison de deux groupes indépendants, et on pourrait utiliser un « t de Student », basé sur la différence d entre les deux groupes et sur l'écart-type intra-groupes s (lequel prendrait alors, sans changement pour la formule, soit la valeur précédente, soit la valeur calculée à partir seulement des deux groupes considérés ; nous y reviendrons dans la conclusion).

$$t = \frac{d}{s\sqrt{k}} \qquad \text{avec } k = \frac{(+1)^2}{4} + \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(où $+1$ et -1 sont les coefficients du contraste entre les groupes et 4 est le nombre de sujets par groupe) dont le carré $F = t^2$ n'est autre que le rapport $\underline{F}$ de l'analyse de la variance entre le carré-moyen « inter » et le carré-moyen « intra ».

Pour plusieurs groupes, la solution peut être *calquée* sur le cas précédent et le rapport $\underline{F}$ traditionnel du tableau II peut être obtenu, à partir de l et s, sous la forme

$$F = \left[\frac{l}{s\sqrt{k}}\right]^2 = 5{,}3783.$$

Comparaison T

La démarche généralise celle que l'on suivrait si le facteur T n'avait que deux modalités. On considère les moyennes et les écarts-types-corrigés des protocoles *dérivés par contraste* sur T correspondant à chacune des trois comparaisons partielles (à 1 d.l.) t_1, t_2, t_2, t_3 et t_3, t_1 qui opposent les traitements deux à deux. Ces protocoles associent à chaque sujet sa différence observée pour les deux traitements considérés (voir tableau I). Les moyennes générales de ces trois protocoles sont les trois effets partiels respectifs (ou différences moyennes entre les paires de traitements) :

$$t_1, t_2 : (+0{,}25 + 0{,}50 + 0{,}00)/3 = +0{,}2500$$
$$t_2, t_3 : (-2{,}25 - 2{,}00 - 1{,}50)/3 = -1{,}9167$$
$$t_3, t_1 : (+2{,}00 + 1{,}50 + 1{,}50)/3 = +1{,}6667.$$

Un indicateur numérique de la grandeur de l'effet de la comparaison T est ici encore fourni par la moyenne quadratique de ces trois effets partiels, soit :

$$l = \sqrt{\frac{0{,}2500^2 + 1{,}9167^2 + 1{,}6667^2}{3}} = 1{,}4735.$$

On retient également la moyenne quadratique des écarts-types-corrigés de chacun des trois groupes et de chacun des trois protocoles dérivés, le modèle usuel en analyse de la variance « univariée » postulant l'homogénéité des neuf écarts-types parents : on retrouve sous cette forme explicite la *condition de circularité* (à l'intérieur de chaque groupe) introduite par Rouanet et Lépine (1970), qui assure la validité du test $\underline{F}$ dans un plan « à mesures répétées » (cf. Kirk, 1982) :

$$s = \sqrt{\frac{1{,}7078^2 + 3{,}1091^2 + \ldots + 2{,}3805^2}{3}} = 2{,}4608.$$

S'il n'y avait que deux traitements, on serait ramené au problème élémentaire de l'inférence sur la moyenne générale d'un plan S $\langle$ G $\rangle$ et on pourrait utiliser un « t de Student », basé sur la moyenne m des différences entre les deux traitements et sur l'écart-type intragroupes s de ces différences (lequel, comme précédemment, prendrait alors, sans changement pour la formule, soit la valeur précédente, soit la valeur calculée à partir seulement des deux traitements considérés)

$$t = \frac{m}{s\sqrt{k}} \quad \text{avec } k = \frac{1}{12}$$

(où 12 est le nombre total de sujets)

ou, son carré $F = t^2$ (rapport $\underline{F}$ de l'analyse de la variance).

Pour plusieurs traitements, la solution peut être *calquée* sur le cas précédent et le rapport $\underline{F}$ traditionnel peut être obtenu, à partir de l et s, sous la forme

$$F = \left[\frac{l}{s\sqrt{k}}\right]^2 = 4{,}3028.$$

Comparaison G.T (interaction entre G et T)

La démarche combine celle suivie pour les deux comparaisons G et T. On considère les mêmes protocoles dérivés que pour la comparaison T et on construit l'indicateur de la grandeur de l'effet observé de la comparaison G.T à partir des neuf effets d'interaction partiels (à 1 d.l.), c'est-à-dire à partir des neuf différences de différences :

$$
\begin{aligned}
g_1, g_2 . t_1, t_2 &: (+0{,}25) - (+0{,}50) = -0{,}2500\\
g_2, g_3 . t_1, t_2 &: (+0{,}50) - (0{,}00) = +0{,}5000\\
g_3, g_1 . t_1, t_2 &: (0{,}00) - (+0{,}25) = -0{,}2500\\
g_1, g_2 . t_2, t_3 &: (-2{,}25) - (-2{,}00) = -0{,}2500\\
g_2, g_3 . t_2, t_3 &: (-2{,}00) - (-1{,}50) = -0{,}5000\\
g_2, g_1 . t_2, t_3 &: (-1{,}50) - (-2{,}25) = +0{,}7500\\
g_1, g_2 . t_3, t_1 &: (+2{,}00) - (+1{,}50) = +0{,}5000\\
g_2, g_3 . t_3, t_1 &: (+1{,}50) - (+1{,}50) = 0{,}0000\\
g_3, g_1 . t_3, t_1 &: (+1{,}50) - (+2{,}00) = +0{,}5000.
\end{aligned}
$$

Un indicateur numérique de la grandeur de l'effet de la comparaison T est fourni par la moyenne quadratique de ces neuf effets partiels, soit :

$$l = \sqrt{\frac{0{,}2500^2 + 0{,}5000^2 + \ldots + 0{,}5000^2}{3}} = 0{,}4410.$$

Le rapport $\underline{F}$ traditionnel peut encore être obtenu sous la forme

$$F = \left[\frac{l}{s\sqrt{k}}\right]^2 = 0{,}0642$$

avec $s = 2{,}4608$ comme pour la comparaison T (on utilise les mêmes protocoles dérivés) et $k = 1/2$ comme pour la comparaison G (il s'agit cette fois, pour ces protocoles dérivés, de comparer les groupes entre eux).

CONCLUSION

L'analyse des comparaisons à plusieurs degrés de liberté, telle que nous venons de l'illustrer, repose sur la notion de *contrastes privilégiés*, qui sont les contrastes que l'on choisirait pour une comparaison du même type à un seul degré de liberté. L'analyse est directement calquée sur celle de ces contrastes privilégiés ; simplement l'inférence ne porte plus sur une combinaison linéaire de moyennes, mais sur une combinaison quadratique.

La principale difficulté introduite par rapport à l'analyse d'un contraste est la construction d'un indicateur approprié de la grandeur de chaque effet examiné. Bien plus qu'une difficulté technique, on verra là une exigence méthodologique, qui est de rechercher une conclusion sur *l'importance* de chaque effet examiné (le fait que l'analyse de la variance traditionnelle élude cette question est à l'évidence la manifestation de son insuffisance).

Dans le cas équilibré, des solutions « standard » (que nous avons utilisées ici) peuvent être obtenues (cf. Lecoutre, 1986), en prenant la *moyenne quadratique* (équipondérée) des effefs partiels des contrastes privilégiés. Dans le cas non équilibré, la difficulté supplémentaire est de choisir pour cette moyenne une pondération appropriée.

Ces effets partiels se définissent en général naturellement, à partir de conventions largement répandues (et dont on pourrait aisément changer) : différence de moyenne, différence de différences de moyennes (pour une interaction simple), etc. Bien entendu les carrés des effets partiels ainsi définis sont proportionnels aux sommes-des-carrés (partielles) traditionnelles en analyse de la variance ; mais on sait que ces dernières sont proportionnelles aux nombres d'observations (effectifs des groupes et nombre de traitements), donc ne peuvent être utilisées comme statistique descriptive pour traduire l'importance (absolue) d'un effet.

Quant au moyennage quadratique, c'est celui de l'analyse de la variance usuelle (on ajoute les *sommes-des-carrés*), qui, comme on le sait, jouit de bonnes propriétés mathématiques.

Par cette approche, apparaissent clairement, dès l'analyse descriptive les choix méthodologiques qui conditionnent les procédures inférentielles.

Ainsi nous avons évoqué précédemment, pour une comparaison partielle sur les groupes G, la possibilité de faire intervenir seulement les groupes pertinents, ou au contraire l'ensemble des groupes pour calculer l'écart-type-corrigé intragroupe ; ce choix correspond en fait à deux rapports $\underline{F}$ différents (qui, dans le programme VAR$_3$, sont respectivement dénommés F_1 et F_2 :

cf. Rouanet et Lépine, 1977). Il en est de même pour une comparaison partielle sur T (dans le programme VAR$_3$, les deux rapports F correspondants sont dénommés F' et F''). D'où quatre possibilités si on combine ces deux éventualités. Les procédures de calcul et les suppositions sous-jacentes de ces différents choix sont ici faciles à comprendre.

Par ailleurs, pour une comparaison à plusieurs degrés de liberté sur les traitements T, la dérivation amène à définir plusieurs protocoles dérivés numériques. Le fait de retenir simplement la moyenne quadratique des effets correspondants, et de ne pas tenir compte des covariances entre ces différents protocoles conditionne déjà le recours à des procédures inférentielles, qui sont liées à la condition de circularité et sont celles considérées en analyse de la variance « univariée ». Le choix effectué apparaît également clairement ici : le recours à des méthodes « multivariées » (qui sortent du cadre de cet article) supposerait, dès le niveau descriptif, une autre caractérisation de la grandeur de l'effet.

Techniquement, en se limitant ici aux procédures « univariées », on retiendra simplement que les statistiques descriptives pertinentes que l'on considère en Analyse des Comparaisons sont proportionnelles aux racines-carrées (pour être dans l'unité de la variable) des sommes-des-carrés (ou carrés-moyens) traditionnelles : mais elles permettent une interprétation directe en termes d'importance des effets considérés (pour plus de détails, cf. Lecoutre, 1984 *a* et 1986).

Bien entendu, il s'agira ensuite de chercher à prolonger inductivement les conclusions descriptives sur l'importance des effets. Si on se contente, comme on le fait traditionnellement, d'utiliser les rapports $\underline{F}$ de l'analyse de la variance, pour procéder à un test de signification, on peut seulement conclure (si le résultat est significatif) à *l'existence* de l'effet examiné. En revanche, et comme pour les comparaisons à un degré de liberté, les procédures *fiducio-bayésiennes* prolongent, conceptuellement et techniquement, les tests de signification (cf. Lecoutre, 1984 *b*, 1985), et permettent des conclusions sur *l'importance* de l'effet. Leur mise en œuvre informatique est désormais aisée (Poitevineau et Lecoutre, 1986), mais nécessite, pour un effet à plusieurs degrés de liberté, un approfondissement de la réflexion méthodologique, notamment si l'on veut conclure au caractère *notable* d'un tel effet (cf. Lecoutre, 1984 *a*, 1986).

RÉSUMÉ

La présente note généralise aux comparaisons à plusieurs degrés de liberté l'article de Hoc (1985), qui montrait comment l'analyse des comparaisons à un degré de liberté peut être regardée comme un prolongement direct des procédures statistiques élémentaires, tant descriptives qu'inférentielles.

Mots clés : analyse de la variance, analyse des comparaisons, inférence spécifique.

BIBLIOGRAPHIE

Hoc (J. M.) — Le royaume du t de Student : les comparaisons à un degré de liberté, *L'Année Psychologique*, 1985, *85* (3), 395-406.

Kirk (R. E.) — *Experimental design : Procedures for the behavioral sciences*, 2e éd., Monterey (CA), Brooks Cole, 1982.

Lecoutre (B.) — Introduction à l'analyse des comparaisons (Extension bayésienne de l'analyse de la variance), *Cahiers d'Anthropologie et Biométrie humaine*, 1983, *1*, 47-94.

Lecoutre (B.) — *L'Analyse bayésienne des comparaisons*, Lille, Presses Universitaires de Lille, 1984 *a*.

Lecoutre (B). — Réinterprétation fiducio-bayésienne du test F de l'analyse de la variance, *L'Année Psychologique*, 1984 *b*, *84* (1), 77-83.

Lecoutre (B.) — How to derive Bayes-fiducial conclusions from usual significance tests, *Cahiers de Psychologie Cognitive*, 1985, *5*, 553-563.

Lecoutre (B.) — Méthodes bayésiennes en analyse des comparaisons : inférences pour des variables numériques, *Informatique et Sciences humaines*, 1986, *68-69*, 15-75.

Poitevineau (J.), Lecoutre (B.) — PIF : un programme d'inférence fiducio-bayésienne, *Informatique et Sciences humaines*, 1986, *68-69*, 77-88.

Rouanet (H.), Lecoutre (B.) — Specific inference in ANOVA : From significance tests to Bayesian procedures, *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 1983, *36*, 252-268.

Rouanet (H.), Lépine (D.) — Comparisons between treatments in a repeated measurement design : ANOVA and multivariate methods, *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 1970, *23*, 147-163.

Rouanet (H.), Lépine (D.) — Introduction à l'analyse des comparaisons pour le traitement des données expérimentales, *Informatique et Sciences humaines*, 1977, *33-34*, 1-125.

(Accepté le 3 octobre 1988.)