Math. Sci. hum. (19^{e}année, n°75, 1981, p.71-82)

DEUX STRUCTURES STATISTIQUES FONDAMENTALES EN ANALYSE DE LA VARIANCE UNIVARIEE ET MULTIVARIEE*

B. LECOUTRE**, H. ROUANET***

1. INTRODUCTION

Cet article sera consacré à deux structures statistiques que l'on rencontre constamment en analyse de la variance, univariée et multivariée : la structure "multinormale - khi-deux" et la structure "multinormale - Wishart".

Nous avons précédemment distingué (Lecoutre [4]) le problème de l'étude de l'effet associé à un contraste et le problème de l'étude de l'effet associé à une comparaison à un nombre quelconque de degrés de liberté. En analyse univariée, le premier problème peut être ramené à la structure "normale - khi-deux". Les deux structures développées ici constituent des généralisations de cette structure "normale - khi-deux" :

. la structure "multinormale - khi-deux" intervient dans les problèmes de comparaison à plusieurs degrés de liberté en analyse de la variance univariée (voir Lecoutre [3] et [4]) ;

. la structure "multinormale - Wishart" intervient dans les problèmes d'inférence sur un contraste en analyse de la variance multivariée (ce dernier point constitue un prolongement des méthodes développées en [3] et [4]).

Pour chacune de ces deux structures, nous envisagerons successivement les tests de signification et les solutions bayésiennes.

---

* Cette recherche a bénéficié de l'aide financière de l'ATP 3447, "Analyse des comparaisons pour protocoles multidimensionnels".

**Laboratoire de Psychologie (ERA 235), Université de PARIS-VIII et Groupe Mathématiques et Psychologie, Université René Descartes

***Groupe Mathématiques et Psychologie, Université René Descartes

2. STRUCTURE STATISTIQUE "MULTINORMALE - KHI-DEUX"

Nous appellerons structure statistique "multinormale - khi-deux", ou encore "m-normale - khi-deux", la donnée de deux statistiques, $\boldsymbol{d}$ et s^2, qui, sous un certain modèle d'échantillonnage, sont distribuées indépendamment, respectivement

$$\mathcal{N}_m(\boldsymbol{\delta}, b\sigma^2\mathbf{I}_m) \qquad \text{et} \qquad \sigma^2 \frac{\chi^2_q}{q}$$

ce que nous noterons :

$$\boldsymbol{d} \perp\!\!\!\perp s^2 \;/\; \boldsymbol{\delta}, \sigma^2$$
$$\boldsymbol{d}/\boldsymbol{\delta}, \sigma^2 \sim \mathcal{N}_m(\boldsymbol{\delta}, b\sigma^2\mathbf{I}_m) \qquad b\in\mathbb{R}_+ \qquad \sigma > 0$$
$$s^2/\boldsymbol{\delta}, \sigma^2 \sim \sigma^2 \frac{\chi^2_q}{q}$$

La structure "m-normale - khi-deux" fait donc intervenir le paramètre multinumérique $\boldsymbol{\delta}$ et le paramètre numérique σ^2. Pour l'inférence, nous ferons jouer au paramètre $\lambda^2 = \boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{\delta}$ le rôle de *paramètre numérique principal* si $m \geqslant 2$ (si $m = 1$ le paramètre numérique principal est bien entendu δ), σ^2 jouant le rôle de paramètre numérique secondaire. En particulier, l'hypothèse nulle $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ est équivalente à $\lambda^2 = 0$. Nous définirons en conséquence la statistique numérique $\ell^2 = \boldsymbol{d}'\boldsymbol{d}$.

Le test de signification sera calqué sur les *tests F* classiques en analyse de la variance (ou encore sur les tests dits du *t de Student* dans le cas particulier $m = 1$). Les procédures bayésiennes, en revanche, mettront en évidence de nouvelles distributions, qui, à notre connaissance, n'ont guère été étudiées à l'heure actuelle.

2.1. Test de signification de l'hypothèse nulle $\lambda^2 = 0$

On envisagera la statistique de test $F = \dfrac{\ell^2}{mbs^2}$, dont la distribution d'échantillonnage est celle d'un F de Fisher-Snedecor à m et q degrés, non-centré en général (d'excentricité $\dfrac{\lambda^2}{b\sigma^2}$), centré lorsque $\lambda^2 = 0$; ce que nous écrirons :

$$\text{sous } H_0 : \lambda^2 = 0, \quad F \sim F_{m,q}$$

(F centré usuel à m et q degrés de liberté)

Dans le cas particulier $m = 1$ (structure "normale - khi-deux"), on envisagera également la statistique de test $t = \dfrac{d}{\sqrt{b}s}$, dont la distribution d'échantillonnage est celle d'un t de Student à q degrés de liberté, non-centré en général (d'excentricité $\dfrac{\delta}{\sqrt{b}\sigma}$), centré lorsque $\delta = 0$; ce que nous écrirons :

$$\text{si } m = 1, \text{ sous } H_0 : \delta = 0, \; t \sim t_q \quad \text{(t usuel à q degrés de liberté)}$$

2.2. Procédures bayésiennes

On se donnera pour $(\boldsymbol{\delta},\sigma^2)$ une distribution initiale, et on en déduira, à partir de la distribution d'échantillonnage conjointe $(\boldsymbol{d},s^2)/\boldsymbol{\delta},\sigma^2$, la distribution finale donnée par le théorème de Bayes.

2.2.1. Cas de distributions initiales marginales indépendantes

Dans le cas particulier où les distributions initiales (marginales) relatives à chacun des paramètres $\boldsymbol{\delta}$ et σ^2 sont indépendantes, on pourra, en utilisant l'indépendance des distributions d'échantillonnage, décomposer l'inférence :

. d'une part en une inférence relative à la structure"multinormale"

$$\boldsymbol{d}/\boldsymbol{\delta},\ [\sigma^2,s^2] \sim \mathcal{N}_m(\boldsymbol{\delta},b\sigma^2\mathbf{I}_m)$$

. d'autre part en une inférence relative à la structure "khi-deux"

$$s^2/\sigma^2,\ [\boldsymbol{d}] \sim \sigma^2\ \frac{\chi^2_q}{q}$$

On en déduira les distributions finales relatives, d'une part à $\boldsymbol{\delta}$ étant donné σ^2, et d'autre part à σ^2, ce qui déterminera la distribution finale conjointe.

2.2.2. Distributions fiducio-bayésiennes

Comme distribution initiale on peut prendre pour $\boldsymbol{\delta}$ la distribution (conjuguée) $\mathcal{N}_m(\mathbf{d}_o,b_o\mathbf{U}_o)$ $(|\mathbf{U}_o|>0)$ et pour σ^{-2} la distribution (conjuguée) $s_o^{-2}\ \dfrac{\chi^2_{q_o}}{q_o}$ avec $\boldsymbol{\delta} \perp\!\!\!\perp \sigma^{-2}$; on obtient dans ce cas la distribution finale, caractérisée par les propriétés suivantes :

$$\boldsymbol{\delta}/\sigma^2,\ \mathbf{d},\ s^2 \sim \mathcal{N}_m\ (\mathbf{d}_1,\ \frac{b_o b}{b_o+b}\ \mathbf{U}_1)$$

$$\sigma^{-2}/\mathbf{d},s^2 \sim\ s_1^{-2}\ \frac{\chi^2_{q_o+q}}{q_o+q}$$

où
$$\mathbf{d}_1 = (b_o\boldsymbol{\Sigma}^{-1}+ b\ \mathbf{U}_o^{-1})^{-1}\ \ (b_o\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{d}+b\ \mathbf{U}_o^{-1}\ \mathbf{d}_o)$$

$$\mathbf{U}_1 = (\frac{b_o\boldsymbol{\Sigma}^{-1}+b\ \mathbf{U}_o^{-1}}{b_o+b})^{-1} \qquad \text{avec ici } \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}_m$$

$$s_1^2 = \frac{q_o s_o^2 + q s^2}{q_o+q}$$

Quand $b_o \to +\infty$ et $q_o \to 0$, ce qui revient à exprimer un état initial d'ignorance, on obtient, en passant à la limite, la distribution finale, caractérisée par les propriétés suivantes :

$$\boldsymbol{\delta}^*\ /\ \sigma^2,\mathbf{d},s^2\ \sim\ \mathcal{N}_m(\mathbf{d},b\sigma^2\mathbf{I}_m)$$

$$\sigma^{-2*} / \mathbf{d}, s^2 \sim s^{-2} \frac{\chi_q^2}{q}$$

Cette distribution, que nous appelons distribution *fiducio-bayésienne* pour la structure "m-normale - khi-deux" (et que nous marquons d'un astérisque), est généralement justifiée dans le cadre bayésien par le recours à la distribution initiale *non-informative* définie en prenant la densité $f(\boldsymbol{\delta},\sigma^2)$ proportionnelle à σ^{-2} (distribution impropre) : cf. Lindley [5], Box et Tiao [2].

La distribution fiducio-bayésienne (marginale) relative au paramètre $\boldsymbol{\delta}$ est une distribution qu'il est d'usage en statistique bayésienne d'appeler distribution du *t de Student m-dimensionnel généralisé*, de centre d et de matrice d'échelle $bs^2 I_m$; nous noterons :

$$\boldsymbol{\delta}^* / \mathbf{d}, s^2 \sim \mathbf{t}_{m,q} (\mathbf{d}, bs^2 \mathbf{I}_m)$$

Lorsque m = 1, il s'agit simplement de la distribution usuelle du t de Student à q degrés de liberté, à un facteur de centrage et d'échelle près :

$$\text{pour } m = 1, \quad \delta^* / d, s^2 \sim d + \sqrt{b}\, s\, t_q$$

La distribution fiducio-bayésienne relative au couple (λ^2,σ^2) est obtenue à partir de la distribution :

$$\lambda^{2*} / \sigma^2, \mathbf{d}, s^2 \sim b\sigma^2 \chi_m^2 \left(\frac{l^2}{b\sigma^2}\right)$$

La distribution fiducio-bayésienne (marginale) relative au paramètre numérique λ^2 est une distribution, que nous appelons distribution du *psi-deux*, à m et q degrés de liberté, qui généralise la distribution du khi-deux non-centré, et dont le rôle apparaît central dans les extensions bayésiennes de l'analyse de la variance (voir Lecoutre [3] et [4]) ; nous écrirons :

$$\lambda^{2*} / \mathbf{d}, s^2 \sim bs^2 \psi_{m,q}^2 \left(\frac{l^2}{bs^2}\right)$$

Il pourra encore être intéressant de considérer les distributions fiducio-bayésiennes relatives, d'une part à $\frac{\boldsymbol{\delta}}{\sigma}$ et d'autre part à $\frac{\lambda^2}{\sigma^2}$.

La première est une distribution, que nous appelons *distribution* $\mathbf{L}'$ *m-dimensionnelle,* à q degrés de liberté (voir sa définition en annexe) ; nous écrirons :

$$\frac{\boldsymbol{\delta}^*}{\sigma^*} / \mathbf{d}, s^2 \sim \mathbf{L}'_{m,q} \left(\frac{\mathbf{d}}{s}, b\mathbf{I}_m\right)$$

La seconde est une distribution, que nous appelons *distribution* L^2, à m et q degrés de liberté (voir sa définition en annexe) ; nous écrirons :

$$\frac{\lambda^{2*}}{\sigma^{2*}} / \mathbf{d}, s^2 \sim b\, L_{m,q}^2 \left(\frac{l^2}{bs^2}\right)$$

Par ailleurs, si nous désignons par F_{obs} la valeur prise par la statistique de test F définie en 2.1., nous pouvons écrire les distributions fiducio-bayésiennes relatives à λ^2 et au rapport $\frac{\lambda^2}{\sigma^2}$ sous la forme :

$$\lambda^{2*} \,/\, \mathbf{d},s^2 \sim \frac{1^2}{mF_{obs}} \; \psi^2_{m,q} \; (mF_{obs})$$

$$\frac{\lambda^{2*}}{\sigma^{2*}} / \mathbf{d},s^2 \sim \frac{\frac{1^2}{s^2}}{mF_{obs}} \; L^2_{m,q} \; (mF_{obs}) \qquad \text{si } 1^2 \neq 0$$

Et, dans le cas particulier m = 1, si nous désignons par t_{obs} la valeur prise par la statistique de test t définie en 2.1., nous avons encore :

$$\delta^* /d,s^2 \sim t_q(d,(\frac{d}{t_{obs}})^2)$$

$$\frac{\delta^*}{\sigma^*} / \, d,s^2 \sim L'_q \left(\frac{d}{s}, (\frac{\frac{d}{s}}{t_{obs}})^2 \right) \qquad \text{si } d \neq 0$$

(en notant L'_q pour $\mathbf{L}'_{1,q}$)

2.2.3. Cas d'une distribution initiale de la même famille que la distribution fiducio-bayésienne

Il peut être intéressant de considérer le cas d'une distribution initiale de la même famille que la distribution fiducio-bayésienne, soit une distribution initiale caractérisée par :

$$\boldsymbol{\delta}/\sigma^2 \sim \boldsymbol{N}_m(\mathbf{d}_o, b_o\sigma^2\mathbf{I}_m)$$

$$\sigma^{-2} \sim s_o^{-2} \; \frac{\chi^2_{q_o}}{q_o}$$

La distribution finale est encore une distribution de la même famille, donnée par :

$$\boldsymbol{\delta}/\sigma^2,\mathbf{d},s^2 \sim \boldsymbol{N}_m(\mathbf{d}_1, \frac{b_o b}{b_o+b} \sigma^2 \, \mathbf{I}_m)$$

$$\text{où } \mathbf{d}_1 = \frac{b_o\mathbf{d}+b\mathbf{d}_o}{b_o+b}$$

$$\sigma^{-2}/d,s^2 \sim s_1^{-2} \; \frac{\chi^2_{q_o+q+m}}{q_o+q+m}$$

$$\text{où } s_1^2 = \frac{q_o s_o^2 + qs^2 + \frac{(\mathbf{d}_o-\mathbf{d})'(\mathbf{d}_o-\mathbf{d})}{b_o+b}}{q_o+q+m}$$

On en déduit :

$$\boldsymbol{\delta}/\mathbf{d},s^2 \sim \mathbf{t}_{m,q_o+q+m} \; (\mathbf{d}_1, \frac{b_o b}{b_o+b} \; s_1^2 \, \mathbf{I}_m)$$

$$\lambda^2/\sigma^2, \mathbf{d}, s^2 \sim \frac{b_o b}{b_o+b}\ \sigma^2\ \chi^2_m\left(\frac{\mathbf{d}'_1\mathbf{d}_1}{\frac{b_o b}{b_o+b}\ \sigma^2}\right)$$

et encore :

$$\frac{\boldsymbol{\delta}}{\sigma} \Big/ \mathbf{d}, s^2 \sim \mathbf{L}'_{m,q_o+q+m}\left(\frac{\mathbf{d}_1}{s_1}, \frac{b_o b}{b_o+b}\mathbf{I}_m\right)$$

$$\frac{\lambda^2}{\sigma^2} \Big/ \mathbf{d}, s^2 \sim \frac{b_o b}{b_o+b}\ L^2_{m,q_o+q+m}\left(\frac{\mathbf{d}'_1\mathbf{d}_1}{\frac{b_o b}{b_o+b}\ s_1^2}\right)$$

On remarquera que, lorsque $b_o \to +\infty$ et $q_o \to 0$, la distribution précédente diffère de la distribution fiducio-bayésienne "par m degrés de liberté", ce qui est dû à l'hypothèse de non-indépendance des distributions initiales de $\boldsymbol{\delta}$ et σ^{-2}.

3. STRUCTURE STATISTIQUE "MULTINORMALE - WISHART"

Nous appellerons structure statistique "multinormale - Wishart", ou encore "r-normale - Wishart", la donnée de deux statistiques, $\boldsymbol{d}$ et $\boldsymbol{S}$, qui, sous un certain modèle d'échantillonnage, sont distribuées indépendamment, respectivement $\mathcal{N}_r(\boldsymbol{\delta}, b\boldsymbol{\Sigma})$ et $\frac{1}{q}\,\boldsymbol{\omega}_{r,q}\,(\boldsymbol{\Sigma})$ (distribution de *Wishart* r-dimensionnelle à q degrés de liberté, de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$, cf. Anderson [1] et Rao [7]) ; ce que nous noterons :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{d} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{S} \ /\ \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\Sigma} \\ &\boldsymbol{d}/\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\Sigma} \sim \mathcal{N}_r(\boldsymbol{\delta}, b\boldsymbol{\Sigma}) \qquad b \in \mathbb{R}_+ \qquad |\boldsymbol{\Sigma}| > 0 \\ &\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\Sigma} \sim \frac{1}{q}\,\omega_{r,q}\ (\boldsymbol{\Sigma}) \end{aligned}$$

La structure "r-normale - Wishart" fait donc intervenir les paramètres multinumériques $\boldsymbol{\delta}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$. Pour l'inférence, nous ferons jouer le rôle de *paramètre numérique principal* au paramètre $\Delta^2 = \boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\delta}$, où $\Delta = (\boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\delta})^{1/2}$ généralise la *distance de Mahalanobis* classique, si $r \geqslant 2$ (si r=1, on retrouve la structure "normale - khi-deux" déjà étudiée en 2.). En particulier, l'hypothèse nulle $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ est équivalente à $\Delta^2 = 0$. Nous définirons en conséquence la statistique numérique $D^2 = \boldsymbol{d}'\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{d}$.

Le test de signification sera calqué sur le test classique de *Hotelling*. Les procédures bayésiennes mettront en évidence de nouvelles distributions, comme dans le cas précédent.

3.1. Test de signification de l'hypothèse nulle $\Delta^2=0$

On envisagera la statistique de test $F = \frac{q-r+1}{q} \frac{D^2}{rb}$ (1), dont la distribution d'échantillonnage est celle d'un F de Fisher-Snedecor à r et q-r+1 degrés de liberté, non-centré en général (d'excentricité $\frac{\Delta^2}{b}$), centré lorsque $\Delta^2=0$; ce que nous écrirons :

$$\text{sous } H_o : \Delta^2 = 0, \; F \sim F_{r,q-r+1}$$

(F centré usuel à r et q-r+1 degrés de liberté)

3.2. Procédures bayésiennes

On se donnera pour $(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\Sigma})$ une distribution initiale, et on en déduira, à partir de la distribution d'échantillonnage $(\boldsymbol{d},\boldsymbol{S})/\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\Sigma}$, la distribution finale donnée par le théorème de Bayes.

3.2.1. Cas de distributions initiales marginales indépendantes

Dans le cas particulier où les distributions initiales (marginales) relatives à chacun des paramètres $\boldsymbol{\delta}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$ sont indépendantes, on pourra, en utilisant l'indépendance des distributions d'échantillonnage, décomposer l'inférence :

. d'une part en une inférence relative à la structure "multinormale"

$$\boldsymbol{d}/\boldsymbol{\delta}, \; [\boldsymbol{\Sigma},\mathbf{S}] \sim \boldsymbol{N}_r(\mathbf{d},b\boldsymbol{\Sigma})$$

. d'autre part en une inférence relative à la structure "Wishart"

$$\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\Sigma},[\mathbf{d}] \sim \frac{1}{q}\, \boldsymbol{\omega}_{r,q}(\boldsymbol{\Sigma})$$

On en déduira les distributions finales relatives, d'une part à $\boldsymbol{\delta}$ étant donné $\boldsymbol{\Sigma}$, et d'autre part à $\boldsymbol{\Sigma}$, ce qui déterminera la distribution finale conjointe.

3.2.2. Distributions fiducio-bayésiennes

Comme distribution initiale on peut prendre pour $\boldsymbol{\delta}$ la distribution (conjuguée) $\boldsymbol{N}_r(\mathbf{d}_o,b_o\mathbf{U}_o)$ ($|\mathbf{U}_o| > 0$) et pour $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ la distribution (conjuguée) $\frac{1}{q_o}\, \boldsymbol{\omega}_{r,q_o}(\mathbf{S}_o^{-1})$ avec $\boldsymbol{\delta} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$; la distribution finale relative à $\boldsymbol{\delta}$ étant donné $\boldsymbol{\Sigma}$ est de la même forme que celle donnée en 2.2.2. pour $\boldsymbol{\delta}$ étant donné σ^2 (mais avec $\boldsymbol{\Sigma}$ quelconque) ; celle relative à $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ est :

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}/\mathbf{d},\mathbf{S} \sim \frac{1}{q_o+q}\, \boldsymbol{\omega}_{r,q_o+q}\left(\left(\frac{q_o\mathbf{S}_o+q\mathbf{S}}{q_o+q}\right)^{-1}\right)$$

Quand $b_o \to +\infty$ et $q_o \to 0$, ce qui revient à exprimer un état initial d'ignorance, on obtient, en passant à la limite, la distribution finale, caractérisée par les propriétés suivantes :

(1) On a encore $F = \frac{q-r+1}{q} \frac{T^2}{r}$, en posant $T^2 = \frac{D^2}{b}$ où T^2 correspond à la statistique de test de Hotelling.

$$\boldsymbol{\delta}^* / \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{d}, \mathbf{S} \sim \mathcal{N}_r(\mathbf{d}, b\boldsymbol{\Sigma})$$
$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1*} / \mathbf{d}, \mathbf{S} \sim \frac{1}{q} \boldsymbol{\omega}_{r,q}(\mathbf{S}^{-1})$$

Cette distribution, que nous appelons distribution *fiducio-bayésienne* pour la structure "r-normale - Wishart" (et que nous marquons d'un astérisque), est généralement justifiée dans le cadre bayésien par le recours à la distribution initiale *non-informative* définie en prenant la densité $f(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\Sigma})$ proportionnelle à $|\Sigma|^{-\frac{r+1}{2}}$ (distribution impropre) : cf. Box et Tiao [2], Press [6].

La distribution fiducio-bayésienne (marginale) relative au paramètre $\boldsymbol{\delta}$ est une distribution du t de Student r-dimensionnel généralisé, à q-r+1 degrés de liberté :

$$\boldsymbol{\delta}^* / \mathbf{d}, \mathbf{S} \sim \mathbf{t}_{r,q-r+1} \; (\mathbf{d}, b \frac{q}{q-r+1} \mathbf{S})$$

On en déduit en particulier :

$$\boldsymbol{\delta}^{*\prime} \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\delta}^* / \mathbf{d}, \mathbf{S} \sim b \frac{q}{q-r+1} \psi^2_{r,q-r+1} \left(\frac{D^2}{b \frac{q}{q-r+1}} \right)$$

La distribution fiducio-bayésienne relative au couple $(\Delta^2,\boldsymbol{\Sigma})$ est obtenue à partir de la distribution :

$$\Delta^{2*} / \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{d}, \mathbf{S} \sim b \, \chi^2_r \left(\frac{\mathbf{d}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{d}}{b}\right)$$

La distribution fiducio-bayésienne (marginale) relative au paramètre Δ^2 est une distribution L^2, à r et q degrés de liberté :

$$\Delta^{2*} / \mathbf{d}, \mathbf{S} \sim b \, L^2_{r,q} \left(\frac{D^2}{b}\right)$$

Par ailleurs, si nous désignons par F_{obs} la valeur prise par la statistique de test F définie en 3.1., nous pouvons écrire les distributions fiducio-bayésiennes relatives à $\boldsymbol{\delta}'\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\delta}$ et à Δ^2 sous la forme :

$$\delta^{*\prime} \mathbf{S}^{-1} \delta^* / \mathbf{d}, \mathbf{S} \sim \frac{D^2}{rF_{obs}} \psi^2_{r,q-r+1} \; (rF_{obs})$$
$$\Delta^{2*} / \mathbf{d}, \mathbf{S} \sim \frac{q-r+1}{q} \frac{D^2}{rF_{obs}} L^2_{r,q} \left(\frac{q}{q-r+1} rF_{obs}\right) \qquad \text{si } D^2 \neq 0$$

3.2.3. Cas d'une distribution initiale de la même famille que la distribution fiducio-bayésienne

Il peut être intéressant de considérer le cas d'une distribution initiale de la même famille que la distribution fiducio-bayésienne, soit une distribution initiale caractérisée par :

$$\boldsymbol{\delta}/\boldsymbol{\Sigma} \sim \mathcal{N}_r\,(\mathbf{d}_o, b_o\boldsymbol{\Sigma})$$
$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sim \frac{1}{q_o}\,\omega_{r,q_o}\,(\mathbf{S}_o^{-1})$$

La distribution finale est encore une distribution de la même famille, donnée par :

$$\boldsymbol{\delta}/\boldsymbol{\Sigma},\mathbf{d},\mathbf{S} \sim \mathcal{N}_r(\mathbf{d}_1, \frac{b_o b}{b_o+b}\boldsymbol{\Sigma})$$

où $\mathbf{d}_1 = \dfrac{b_o\mathbf{d}+b\mathbf{d}_o}{b_o+b}$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}/\mathbf{d},\mathbf{S} \sim \frac{1}{q_o+q+1}\,\omega_{r,q_o+q+1}\,(\mathbf{S}_1^{-1})$$

où $\mathbf{S}_1 = \dfrac{q_o\mathbf{S}_o+q\mathbf{S}+\dfrac{(\mathbf{d}_o-\mathbf{d})(\mathbf{d}_o-\mathbf{d})'}{b_o+b}}{q_o+q+1}$

On en déduit :

$$\boldsymbol{\delta}/\mathbf{d},\mathbf{S} \sim \mathbf{t}_{r,q_o+q-r+2}\,(\mathbf{d}_1, \frac{b_o b}{b_o+b}\,\frac{q_o+q+1}{q_o+q-r+2}\,\mathbf{S}_1)$$

$$\boldsymbol{\delta}'\mathbf{S}_1^{-1}\boldsymbol{\delta}/\mathbf{d},\mathbf{S} \sim \frac{b_o b}{b_o+b}\,\frac{q_o+q+1}{q_o+q-r+2}\,\psi^2_{r,q_o+q-r+2}\left(\frac{\mathbf{d}_1'\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{d}_1}{\dfrac{b_o b}{b_o+b}\,\dfrac{q_o+q-1}{q_o+q-r+2}}\right)$$

$$\Delta^2/\mathbf{d},\mathbf{S} \sim \frac{b_o b}{b_o+b}\,L^2_{r,q_o+q+1}\left(\frac{\mathbf{d}_1'\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{d}_1}{\dfrac{b_o b}{b_o+b}}\right)$$

On remarquera que, lorsque $b_o \to +\infty$ et $q_o \to 0$, la distribution précédente diffère de la distribution fiducio-bayésienne "par un degré de liberté", ce qui est dû à l'hypothèse de non-indépendance des distributions initiales de $\boldsymbol{\delta}$ et $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$.

4. ANNEXES : DISTRIBUTIONS INTRODUITES

4.1. Distributions $\mathbf{L}'_{p,q}(\boldsymbol{a})$

Si $\boldsymbol{x}/y \sim \boldsymbol{N}_p(\sqrt{y}\,\boldsymbol{a},\ b\mathbf{I}_p)$ et $y \sim \frac{\chi^2_q}{q}$, alors nous dirons que $\boldsymbol{x}$ a la distribution $\mathbf{L}'$ p-dimensionnelle, à q degrés de liberté, de position $\boldsymbol{a}$ et d'échelle $b\mathbf{I}_p$; nous noterons :

$$\boldsymbol{x} \sim \mathbf{L}'_{p,q}\ (\boldsymbol{a}, b\mathbf{I}_p)$$

On a les propriétés suivantes (écrites symboliquement) :

$$\mathbf{L}'_{p,q}\ (\mathbf{0}, b\mathbf{I}_p) = \boldsymbol{N}_p(\mathbf{0}, b\mathbf{I}_p)$$
$$\mathrm{L}'_{p,\infty}\ (\boldsymbol{a}, b\mathbf{I}_p) = \boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{a}, b\mathbf{I}_p)$$

Si $\boldsymbol{x} \sim \mathbf{L}'_{p,q}(\boldsymbol{a})$, on montre que $\boldsymbol{x}$ a pour densité :

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi b)^{-\frac{p}{2}}\ \frac{1}{\Gamma(\frac{q}{2})}\ \left(\frac{qb}{qb+\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}}\right)^{\frac{q}{2}}\ \exp\left(-\frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}}{2b}\right)$$
$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}\ \Gamma\left(\frac{q+j}{2}\right)\ \left(\left(\frac{2}{b(qb+\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a})}\right)^{\frac{1}{2}}\ \boldsymbol{a}'\mathbf{x}\right)^j$$

pour moyenne :

$$\frac{\sqrt{2}\ \ \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\sqrt{q}\ \ \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\ \boldsymbol{a}$$

et pour matrice de variances et covariances :

$$b\mathbf{I}_p + \left(1 - \frac{2}{q}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\right]^2\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'$$

Enfin, si $\boldsymbol{x} \sim \mathbf{L}'_{p,q}\ (\boldsymbol{a}, b\mathbf{I}_p)$ et si $\mathbf{M}$ est une matrice à p lignes et k ($k \leqslant p$) colonnes, telle que $\mathbf{M}'\mathbf{M} = c\mathbf{I}_k$, alors :

$$\mathbf{M}'\boldsymbol{x} \sim \mathbf{L}'_{k,q}\ (\mathbf{M}'\boldsymbol{a}, bc\mathbf{I}_k)$$

En particulier, en prenant pour $\mathbf{M}$ un vecteur colonne comportant un 1 à la ligne i et des 0 partout ailleurs, on obtient la distribution marginale du ième composant de $\boldsymbol{x}$, soit :

$$x^i \sim \mathbf{L}'_{1,q}\ (a^i, b)$$

qui, suivant la définition précédente, est la distribution L' unidimensionnelle à q degrés de liberté, d'indice de position a^i et d'indice d'échelle b ; nous noterons encore : $x^i \sim \mathrm{L}'_q\ (a^i, b)$

4.2. Distribution $L^2_{p,q}(a)$

Si $x/y \sim \chi^2_p(ay)$ et $y \sim \frac{\chi^2_q}{q}$, alors nous dirons que x a la distribution L^2, à p et q degrés de liberté, d'excentricité a ; nous noterons :

$$x \sim L^2_{p,q}\ (a)$$

On peut également donner la caractérisation équivalente suivante :
si $\boldsymbol{x} \sim \mathbf{L}'_{p,q}\ (\boldsymbol{a}, \mathbf{I}_p)$ alors $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} \sim L^2_{p,q}\ (\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a})$.

On a les propriétés suivantes (écrites symboliquement) :

$$L^2_{p,q}\ (0) = \chi^2_p$$

$$L^2_{p,\infty}(a) = \chi^2_p(a)$$

Si $x \sim L^2_{p,q}(a)$, on montre que x a pour densité :

$$f(x) = 2^{-\frac{p}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{q}{2})} \left(\frac{q}{q+a}\right)^{\frac{q}{2}} x^{\frac{p}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \frac{\Gamma(\frac{q}{2}+j)}{\Gamma(\frac{p}{2}+j)} \left(\frac{ax}{2(q+a)}\right)^j$$

pour moyenne : $p+a$

et pour variance : $2(p+2a+\frac{a^2}{q})$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDERSON T.W., *An introduction to multivariate statistical analysis,* New York, John Wiley and Sons, 1958.

[2] BOX G.E.P., TIAO G.C., *Bayesian inference in statistical analysis*, Wesley Publishing Company, 1973.

[3] LECOUTRE B., *Extensions bayésiennes de l'analyse de la variance,* Paris, Université René Descartes, thèse de doctorat de troisième Cycle, 1980.

[4] LECOUTRE B., "Extensions de l'analyse de la variance : l'analyse bayésienne des comparaisons", *Math. Sci. hum., 75*, 1981, p.49-69.

[5] LINDLEY D.V., *Introduction to probability and statistics from a bayesian viewpoint, Part 2 - Inference,* Cambridge University Press, 1965.

[6] PRESS S.J., *Applied multivariate analysis*, New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1972.

[7] RAO C.R., *Linear statistical inference and its applications,* New York, John Wiley and Sons, 1965.