

Intervalles de confiance pour une proportion

Applications aux événements rares

Bruno Lecoutre

ERIS, Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem
UMR 6085, CNRS et Université de Rouen

Strasbourg - 11 Janvier 2011



Préliminaires

- Logiciel LePAC
- Modèle binomial – Evénements rares
- Taux de couverture fréquentistes
- Différents types d'intervalles de confiance

Partie I - Intervalle de confiance pour une proportion
sous un modèle binomial

Partie II - Application à l'intervalle de confiance
pour le rapport de deux proportions sous un modèle de Poisson

Logiciel LePAC

Nouvelle version prochainement disponible

ERIS - Télécharger/Download

Equipe Raisonement Induction Statistique
Télécharger / Download

Accueil/Home Sommaire/Content

LePAC Version 1.5.7

LePAC est un logiciel d'analyse statistique de données expérimentales, plus particulièrement destiné à l'**inférence bayésienne**, tout en incluant les procédures fréquentistes 'traditionnelles'. Il regroupe différents programmes.
LePAC is a software for the **statistical analysis of experimental data**, especially devoted to **Bayesian inference**, including 'traditional' frequentist procedures. It includes several programs.

- **PAC** (nouvelle version) / [English](#) (new version)
- **LesMoyennes** / [English](#)
- **NOUVEAU LesCorrélations** / ~~2006~~ [English](#)
- **LesEffectifs** / [English](#)
- **LesEchantillons** / [English](#)
- **LesProportions** (version bêta) / [English](#) (beta version)
- **NOUVEAU LeB-A-Bayésien** / ~~2006~~ [English](#)
- **LesDistributions** (version bêta) / [English](#) (beta version)
- **LePrep** / [English](#)

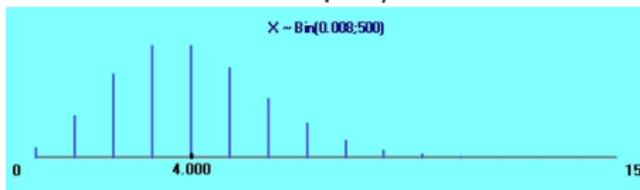
LePAC Windows 1.5.7 français	plus...	télécharger LePACsetup.zip
LePAC Windows 1.5.7 english/français	more...	download LePACEnglishsetup.zip

Préliminaires – Modèle binomial et événements rares

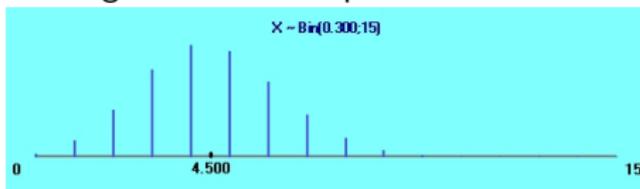
Variable dichotomique $\begin{matrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 - \varphi \end{matrix}$

φ proportion d'événements
 n (fixé) observations $X \sim \text{Bin}(\varphi, n)$

“Événements rares” - Exemple $\varphi = .008$ $n = 500$ $x = 6$



Situation en fait analogue à celle des “petits échantillons” $\varphi = .35$ $n = 15$



Intervalles de confiance et leurs performances fréquentistes

Des **intervalles de confiance** pour φ peuvent être obtenus

- par des **méthodes fréquentistes**

Un très grand nombre de procédures différentes fournissent des intervalles uni- ou bi-latéraux, généralement associés à des tests

- le plus souvent obtenus au moyen de différents types d'approximations de la distribution d'échantillonnage
- mais il existe aussi des méthodes qui sont basées directement sur la distribution binomiale, donc 'exactes' en un sens à préciser

- par une **approche bayésienne**

on parle dans ce cas d'**intervalles de crédibilité** pour marquer la différence de conception

- Les **performances fréquentistes** de ces différentes procédures seront comparées selon les critères conventionnels de **taux de couverture** et de **taux d'erreurs** (supérieure et inférieure) de couverture

Intervalles de confiance et leurs performances fréquentistes

Des **intervalles de confiance** pour φ peuvent être obtenus

- par des **méthodes fréquentistes**

Un très grand nombre de procédures différentes fournissent des intervalles uni- ou bi-latéraux, généralement associés à des tests

- le plus souvent obtenus au moyen de différents types d'approximations de la distribution d'échantillonnage
- mais il existe aussi des méthodes qui sont basées directement sur la distribution binomiale, donc 'exactes' en un sens à préciser

- par une **approche bayésienne**

on parle dans ce cas d'**intervalles de crédibilité** pour marquer la différence de conception

- Les **performances fréquentistes** de ces différentes procédures seront comparées selon les critères conventionnels de **taux de couverture** et de **taux d'erreurs** (supérieure et inférieure) de couverture

Intervalles de confiance et leurs performances fréquentistes

Des **intervalles de confiance** pour φ peuvent être obtenus

- par des **méthodes fréquentistes**

Un très grand nombre de procédures différentes fournissent des intervalles uni- ou bi-latéraux, généralement associés à des tests

- le plus souvent obtenus au moyen de différents types d'approximations de la distribution d'échantillonnage
- mais il existe aussi des méthodes qui sont basées directement sur la distribution binomiale, donc 'exactes' en un sens à préciser

- par une **approche bayésienne**

on parle dans ce cas d'**intervalles de crédibilité** pour marquer la différence de conception

- Les **performances fréquentistes** de ces différentes procédures seront comparées selon les critères conventionnels de **taux de couverture** et de **taux d'erreurs** (supérieure et inférieure) de couverture

Taux de couverture fréquentistes

- φ fixée
- Un intervalle particulier $[L(x), U(x)]$, associé à l'observation x ne contient pas φ si
 $L(x) > \varphi$ (erreur inférieure) ou $U(x) < \varphi$ (erreur supérieure)

Probabilités d'échantillonnage des erreurs de couverture

$$Q_{inf} = \sum_{x=0}^n Pr(X = x | \varphi) \mathbb{1}_{[\varphi, 1]}(L(x))$$

$$Q_{sup} = \sum_{x=0}^n Pr(X = x | \varphi) \mathbb{1}_{[0, \varphi]}(U(x))$$

- Taux de couverture bilatéral = $1 - (Q_{inf} + Q_{sup})$

Taux de couverture fréquentistes

- φ fixée
- Un intervalle particulier $[L(x), U(x)]$, associé à l'observation x ne contient pas φ si $L(x) > \varphi$ (erreur inférieure) ou $U(x) < \varphi$ (erreur supérieure)

Probabilités d'échantillonnage des erreurs de couverture

$$Q_{inf} = \sum_{x=0}^n Pr(X = x | \varphi) \mathbb{1}_{[\varphi, 1]}(L(x))$$

$$Q_{sup} = \sum_{x=0}^n Pr(X = x | \varphi) \mathbb{1}_{[0, \varphi]}(U(x))$$

- Taux de couverture bilatéral = $1 - (Q_{inf} + Q_{sup})$

Taux de couverture fréquentistes

- φ fixée
- Un intervalle particulier $[L(x), U(x)]$, associé à l'observation x ne contient pas φ si $L(x) > \varphi$ (erreur inférieure) ou $U(x) < \varphi$ (erreur supérieure)

Probabilités d'échantillonnage des erreurs de couverture

$$Q_{inf} = \sum_{x=0}^n Pr(X = x | \varphi) \mathbb{1}_{[\varphi, 1]}(L(x))$$

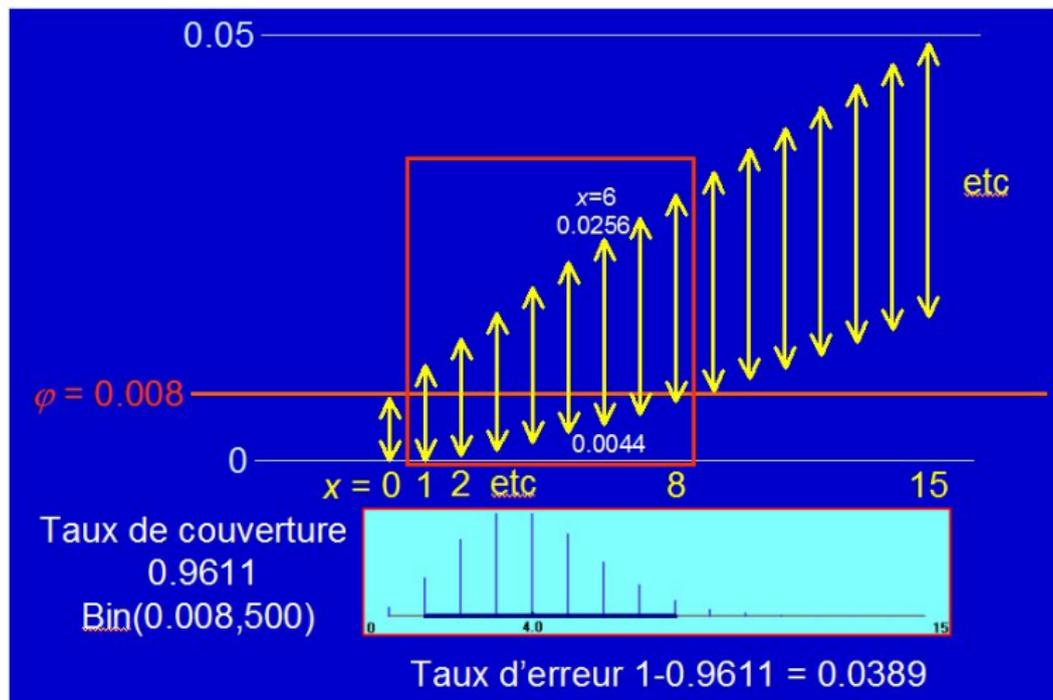
$$Q_{sup} = \sum_{x=0}^n Pr(X = x | \varphi) \mathbb{1}_{[0, \varphi]}(U(x))$$

- Taux de couverture bilatéral = $1 - (Q_{inf} + Q_{sup})$

Exemple - Taux de couverture IC 95% Clopper-Pearson

$$\varphi = 0.008$$

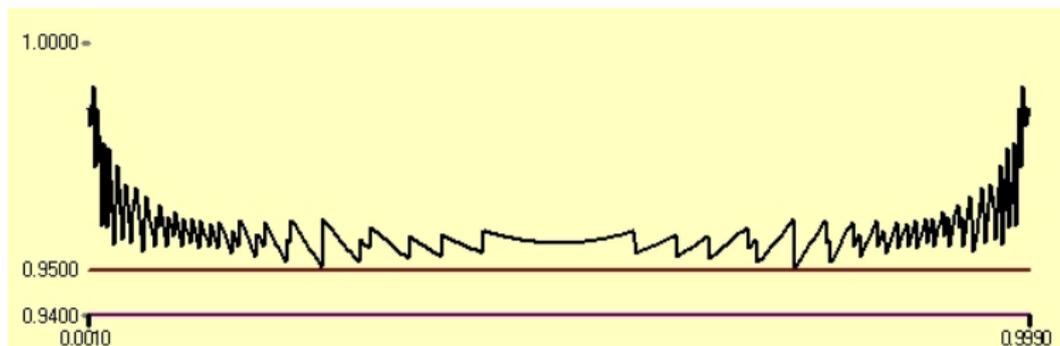
$$n = 500$$



Taux de couverture

- Faciles à calculer
- Pour φ fixé, donnés par la distribution binomiale
(ou par la fonction bêta incomplète)

Exemple: IC 95% Clopper-Pearson
Taux de couverture bilatéral – $n = 500$

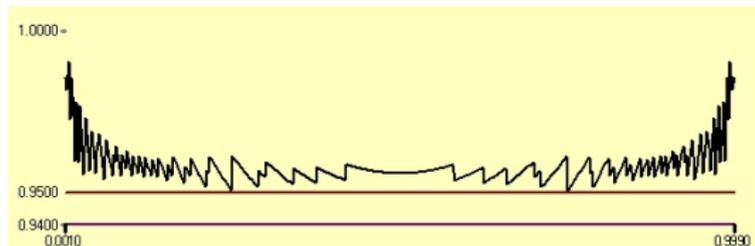


Vous avez dit "exact" ?

"It is customary to guarantee a minimum coverage probability, or confidence coefficient, for a procedure C . To say that C is a $1 - \alpha$ confidence interval procedure means

$$\inf_{\varphi} Pr(\varphi \in C | \varphi) \geq 1 - \alpha$$

Casella & Robert (1989)



Il y a 'exact' et EXACT

Randomized confidence intervals

Principe de la technique d'aléatorisation ("randomisation")

Stevens (1950), voir notamment Puza & O'Neil (2006)

- Générer une valeur aléatoire u suivant une distribution uniforme(0,1)
- Remplacer la distribution binomiale discrète par la distribution continue de la variable aléatoire $Y = X - U$
- \Leftrightarrow Taux de couverture exactement égal à $1 - \alpha$, comme dans le cas continu
- Rarement considéré en dehors des discussions théoriques
Les utilisateurs sont réticents à utiliser une procédure qui donne des inférences différentes pour deux échantillons de données identiques!

Il y a 'exact' et EXACT

Randomized confidence intervals

Principe de la technique d'aléatorisation ("randomisation")

Stevens (1950), voir notamment Puza & O'Neil (2006)

- Générer une valeur aléatoire u suivant une distribution uniforme(0,1)
- Remplacer la distribution binomiale discrète par la distribution continue de la variable aléatoire $Y = X - U$
- \leftrightarrow Taux de couverture exactement égal à $1 - \alpha$, comme dans le cas continu
- Rarement considéré en dehors des discussions théoriques
Les utilisateurs sont réticents à utiliser une procédure qui donne des inférences différentes pour deux échantillons de données identiques!

Il y a 'exact' et EXACT

Randomized confidence intervals

Principe de la technique d'aléatorisation ("randomisation")

Stevens (1950), voir notamment Puza & O'Neil (2006)

- Générer **une valeur aléatoire u** suivant une distribution uniforme(0,1)
- Remplacer la distribution binomiale discrète par la distribution continue de la variable aléatoire $Y = X - U$
- \hookrightarrow Taux de couverture **exactement égal à $1 - \alpha$** , comme dans le cas continu
- Rarement considéré en dehors des discussions théoriques
Les utilisateurs sont réticents à utiliser une procédure qui donne des inférences différentes pour deux échantillons de données identiques!

Il y a 'exact' et EXACT

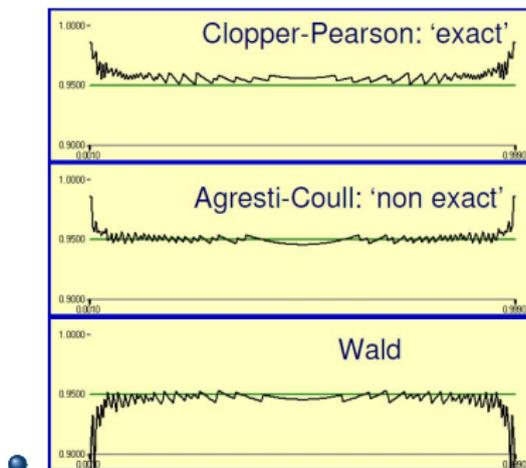
Randomized confidence intervals

Principe de la technique d'aléatorisation ("randomisation")

Stevens (1950), voir notamment Puza & O'Neil (2006)

- Générer **une valeur aléatoire u** suivant une distribution uniforme(0,1)
- Remplacer la distribution binomiale discrète par la distribution continue de la variable aléatoire $Y = X - U$
- \hookrightarrow Taux de couverture **exactement égal à $1 - \alpha$** , comme dans le cas continu
- Rarement considéré en dehors des discussions théoriques
Les utilisateurs sont réticents à utiliser une procédure qui donne des inférences différentes pour deux échantillons de données identiques!

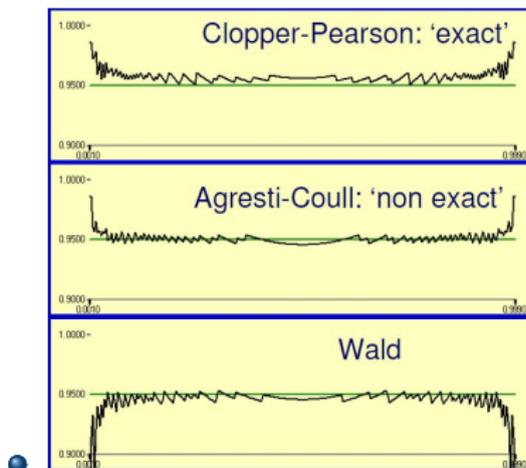
'exact' ou 'approché' ?



- Analyse des données expérimentales
↳ compromis entre méthodes d'inférence
"conservatrices" et "libérales"

Approximate is better than 'exact' for interval estimation of binomial proportions

'exact' ou 'approché' ?

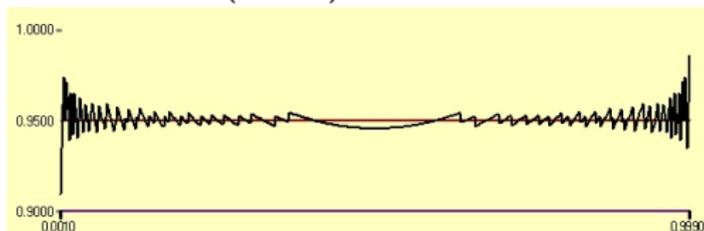


- Analyse des données expérimentales
↳ compromis entre méthodes d'inférence
"conservatrices" et "libérales"

Approximate is better than 'exact' for interval estimation of binomial proportions

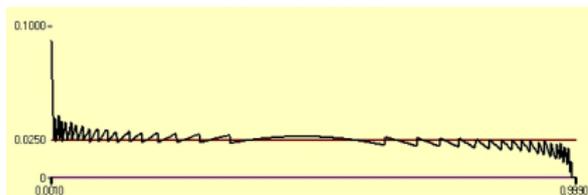
bilatéral ou unilatéral?

Intervalle de score (Wilson) - Taux de couverture bilatéral

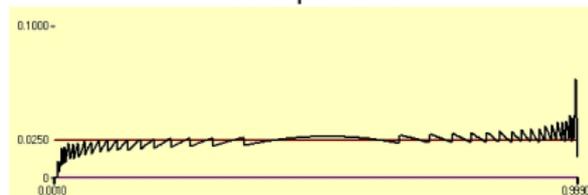


Taux d'erreur

Limite inférieure



Limite supérieure



Partie I - Inférence sur une proportion

1 Les intervalles bilatéraux exacts

- L'intervalle de Clopper-Pearson (1934)
- Clopper-Pearson et intervalles exacts "optimaux"
- L'intervalle de Blaker (2000) / Cox & Hinkley (1974)
- Des intervalles approximés quasi exacts

2 Des intervalles 'exacts' approchés

- Anti-exacts
- Inférence *floue* - Probabilités *imprécises*
- Approchés: *mid-P*, bayésien (Jeffreys)
- Approchés: *w-P*

3 Intervalles approximés et approchés

- Intervalle de Wald (approximation normale) et modifications
- Raffinements
- Des nombreuse autres méthodes

4 Comparaison des méthodes

- Événements rares
- Taux de couverture bilatéral
- Taux d'erreur unilatéraux
- ... et l'intervalle de Blaker?

$$X \sim \text{Bin}(n, \varphi) \quad \Pr(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \varphi^x (1 - \varphi)^{n-x}$$

- **Notation**

x événements observés, si $\varphi = \varphi_0$

$$P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X \leq x) = \sum_{i=0}^x \Pr(X = i) = B_{(n, \varphi_0)}(x)$$

- Limite supérieure U_{α}^{CP} de l'intervalle de Clopper-Pearson
 U_{α}^{CP} obtenue par inversion du test binomial unilatéral
("Uniformly Most Powerful") dont le seuil observé est

$$P = P_{\text{left}}(\varphi_0, x) \quad (\text{"P-value"})$$

- Il faut résoudre

$$P_{\text{left}}(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) = B_{(n, \varphi_0)}(U_{\alpha}^{\text{CP}}) = \frac{1}{2}\alpha$$

$$X \sim \text{Bin}(n, \varphi) \quad \Pr(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \varphi^x (1 - \varphi)^{n-x}$$

- **Notation**

x événements observés, si $\varphi = \varphi_0$

$$P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X \leq x) = \sum_{i=0}^x \Pr(X = i) = B_{(n, \varphi_0)}(x)$$

- **Limite supérieure U_{α}^{CP} de l'intervalle de Clopper-Pearson**

U_{α}^{CP} obtenue par inversion du test binomial unilatéral
("Uniformly Most Powerful") dont le seuil observé est

$$P = P_{\text{left}}(\varphi_0, x) \quad (\text{"P-value"})$$

- Il faut résoudre

$$P_{\text{left}}(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) = B_{(n, \varphi_0)}(U_{\alpha}^{\text{CP}}) = \frac{1}{2}\alpha$$

$$X \sim \text{Bin}(n, \varphi) \quad \Pr(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \varphi^x (1 - \varphi)^{n-x}$$

- **Notation**

x événements observés, si $\varphi = \varphi_0$

$$P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X \leq x) = \sum_{i=0}^x \Pr(X = i) = B_{(n, \varphi_0)}(x)$$

- **Limite supérieure U_{α}^{CP} de l'intervalle de Clopper-Pearson**

U_{α}^{CP} obtenue par inversion du test binomial unilatéral
("Uniformly Most Powerful") dont le seuil observé est

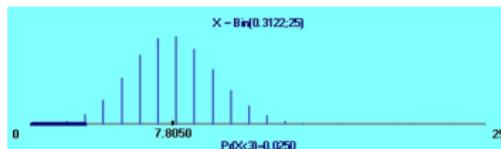
$$P = P_{\text{left}}(\varphi_0, x) \quad (\text{"P-value"})$$

- Il faut résoudre

$$P_{\text{left}}(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) = B_{(n, \varphi_0)}(U_{\alpha}^{\text{CP}}) = \frac{1}{2}\alpha$$

Intervalle de Clopper-Pearson et fonction bêta incomplète

- Exemple $x = 3$ $n = 25 \mapsto U_{.05}^{CP} = .3122$



- Fonction bêta incomplète régularisée

$$I_y(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^y t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

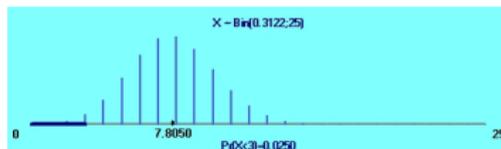
$$B_{(n, \varphi_0)}(U_{\alpha}^{CP}) = 1 - I_{\varphi}(x+1, n-x)$$

Johnson, Kemp & Kotz (1993, p. 117)

- En pratique, U_{α}^{CP} peut être calculée à partir de l'inverse de la fonction bêta incomplète

Intervalle de Clopper-Pearson et fonction bêta incomplète

- Exemple $x = 3$ $n = 25 \mapsto U_{.05}^{CP} = .3122$



- Fonction bêta incomplète régularisée

$$I_y(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^y t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

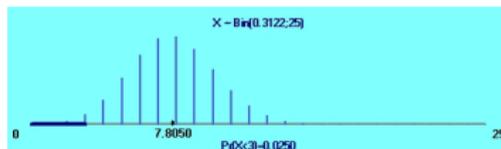
$$B_{(n, \varphi_0)}(U_{\alpha}^{CP}) = 1 - I_{\varphi}(x+1, n-x)$$

Johnson, Kemp & Kotz (1993, p. 117)

- En pratique, U_{α}^{CP} peut être calculée à partir de l'inverse de la fonction bêta incomplète

Intervalle de Clopper-Pearson et fonction bêta incomplète

- Exemple $x = 3$ $n = 25 \mapsto U_{.05}^{CP} = .3122$



- Fonction bêta incomplète régularisée

$$I_y(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^y t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

$$B_{(n, \varphi_0)}(U_{\alpha}^{CP}) = 1 - I_{\varphi}(x+1, n-x)$$

Johnson, Kemp & Kotz (1993, p. 117)

- En pratique, U_{α}^{CP} peut être calculée à partir de l'inverse de la fonction bêta incomplète

Intervalle de Clopper-Pearson et méthodes bayésiennes

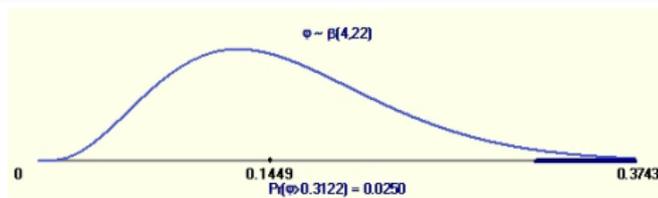
- U_{α}^{CP} est la limite supérieure de l'intervalle de crédibilité bayésien ("equal-tailed") pour la distribution *a priori* bêta(1, 0) – d'où l'*a posteriori*

$$\varphi | x \sim \text{bêta}(x + 1, n - x)$$

Lecoutre (2008)

- Exemple

$$x = 3 \quad n = 25 \mapsto \varphi | x = 3 \sim \text{Bêta}(4, 22)$$



Intervalle de Clopper-Pearson et méthodes bayésiennes

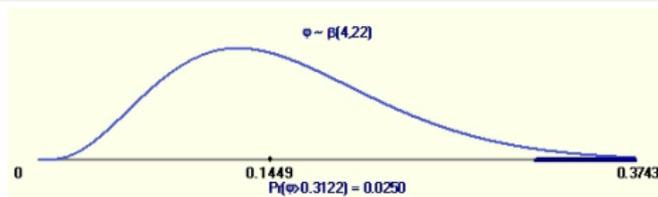
- U_{α}^{CP} est la limite supérieure de l'intervalle de crédibilité bayésien ("equal-tailed") pour la distribution *a priori* bêta(1, 0) – d'où l'*a posteriori*

$$\varphi | x \sim \text{bêta}(x + 1, n - x)$$

Lecoutre (2008)

- Exemple

$$x = 3 \quad n = 25 \mapsto \varphi | x = 3 \sim \text{Bêta}(4, 22)$$



Clopper-Pearson méthode très répandue mais loin d'être optimale

- Cependant la seule méthode qui garantit aussi que les probabilités d'erreur unilatérales sont au plus $\alpha/2$
- \leftrightarrow Peut conduire à des inférences très conservatrice
Peut être excessivement large et son taux de couverture peut être très supérieur à $1 - \alpha$
- Recherche d'intervalles exacts "optimaux", notamment

Sterne (1954)

Crow (1956)

Blyth & Still (1983), Casella (1986)

Blaker (2000)

- Rarement utilisés
Calculs intensifs
Pas toujours disponibles (échantillons de taille élevée)

Clopper-Pearson méthode très répandue mais loin d'être optimale

- Cependant la seule méthode qui garantit aussi que les probabilités d'erreur unilatérales sont au plus $\alpha/2$
- \hookrightarrow Peut conduire à des inférences très conservatrice
Peut être excessivement large et son taux de couverture peut être très supérieur à $1 - \alpha$
- Recherche d'intervalles exacts "optimaux", notamment

Sterne (1954)

Crow (1956)

Blyth & Still (1983), Casella (1986)

Blaker (2000)

- Rarement utilisés
Calculs intensifs
Pas toujours disponibles (échantillons de taille élevée)

Clopper-Pearson méthode très répandue mais loin d'être optimale

- Cependant la seule méthode qui garantit aussi que les probabilités d'erreur unilatérales sont au plus $\alpha/2$
- \hookrightarrow Peut conduire à des inférences très conservatrice
Peut être excessivement large et son taux de couverture peut être très supérieur à $1 - \alpha$
- Recherche d'intervalles exacts "optimaux", notamment

Sterne (1954)

Crow (1956)

Blyth & Still (1983), Casella (1986)

Blaker (2000)

- Rarement utilisés
Calculs intensifs
Pas toujours disponibles (échantillons de taille élevée)

Clopper-Pearson méthode très répandue mais loin d'être optimale

- Cependant la seule méthode qui garantit aussi que les probabilités d'erreur unilatérales sont au plus $\alpha/2$
- \hookrightarrow Peut conduire à des inférences très conservatrice
Peut être excessivement large et son taux de couverture peut être très supérieur à $1 - \alpha$
- Recherche d'intervalles exacts "optimaux", notamment

Sterne (1954)

Crow (1956)

Blyth & Still (1983), Casella (1986)

Blaker (2000)

- Rarement utilisés
Calculs intensifs
Pas toujours disponibles (échantillons de taille élevée)

Clopper-Pearson méthode très répandue mais loin d'être optimale

- Cependant la seule méthode qui garantit aussi que les probabilités d'erreur unilatérales sont au plus $\alpha/2$
- \hookrightarrow Peut conduire à des inférences très conservatrice
Peut être excessivement large et son taux de couverture peut être très supérieur à $1 - \alpha$
- Recherche d'intervalles exacts "optimaux", notamment

Sterne (1954)

Crow (1956)

Blyth & Still (1983), Casella (1986)

Blaker (2000)

- Rarement utilisés
Calculs intensifs
Pas toujours disponibles (échantillons de taille élevée)

Des comportements indésirables, pathologiques

- Méthode de Sterne: peut donner deux intervalles séparés
- Intervalle de Blyth-Still-Casella: ne respecte pas la condition naturelle d'*emboîtement* (Blaker, 2000)
 - Si $\alpha < \alpha'$ alors $IC_{100(1-\alpha)'\%} \subset IC_{100(1-\alpha)\%}$
- Intervalle de Blaker: ne présente pas ces problèmes, mais a aussi des comportements indésirables
- Il n'est pas une fonction monotone de la taille d'échantillon

Vos & Hudson (2008)

Exemple: un succès observé pour un échantillon de taille n

Intervalles 95%

$n = 9$ [.0057, .4435] ↘
 $n = 10$ [.0051, .4444] ↗
 $n = 11$ [.0047, .4010] ↘

Des comportements indésirables, pathologiques

- Méthode de Sterne: peut donner deux intervalles séparés
- Intervalle de Blyth-Still-Casella: ne respecte pas la condition naturelle d'*emboîtement* (Blaker, 2000)
Si $\alpha < \alpha'$ alors $IC_{100(1-\alpha)'\%} \subset IC_{100(1-\alpha)\%}$
- Intervalle de Blaker: ne présente pas ces problèmes, mais a aussi des comportements indésirables
- Il n'est pas une fonction monotone de la taille d'échantillon

Vos & Hudson (2008)

Exemple: un succès observé pour un échantillon de taille n

Intervalles 95%

$n = 9$ [.0057, .4435] ↘
 $n = 10$ [.0051, .4444] ↗
 $n = 11$ [.0047, .4010] ↘

Des comportements indésirables, pathologiques

- Méthode de Sterne: peut donner deux intervalles séparés
- Intervalle de Blyth-Still-Casella: ne respecte pas la condition naturelle d'*emboîtement* (Blaker, 2000)
Si $\alpha < \alpha'$ alors $IC_{100(1-\alpha)'\%} \subset IC_{100(1-\alpha)\%}$
- Intervalle de Blaker: ne présente pas ces problèmes, mais a aussi des comportements indésirables
- Il n'est pas une fonction monotone de la taille d'échantillon

Vos & Hudson (2008)

Exemple: un succès observé pour un échantillon de taille n

Intervalles 95%

$n = 9$ [.0057, .4435] ↘
 $n = 10$ [.0051, .4444] ↗
 $n = 11$ [.0047, .4010] ↘

Des comportements indésirables, pathologiques

- Méthode de Sterne: peut donner deux intervalles séparés
- Intervalle de Blyth-Still-Casella: ne respecte pas la condition naturelle d'*emboîtement* (Blaker, 2000)
Si $\alpha < \alpha'$ alors $IC_{100(1-\alpha)'\%} \subset IC_{100(1-\alpha)\%}$
- Intervalle de Blaker: ne présente pas ces problèmes, mais a aussi des comportements indésirables
- Il n'est pas une fonction monotone de la taille d'échantillon

Vos & Hudson (2008)

Exemple: un succès observé pour un échantillon de taille n

Intervalles 95%

$$\begin{array}{l} n = 9 \quad [.0057, .4435] \quad \searrow \\ n = 10 \quad [.0051, .4444] \quad \nearrow \\ n = 11 \quad [.0047, .4010] \quad \searrow \end{array}$$

Autres intervalles, autres comportements donnant lieu à discussion

- Méthodes approchées:
 - peuvent donner des limites en dehors de l'intervalle $[0,1]$
- Pour $x = 0$ (aucun événement observé), la limite inférieure peut être strictement positive
 - C'est le cas de l'intervalle bayésien de Jeffreys
 - Mais conforme à la logique bayésienne
 - L'intervalle bilatéral n'est qu'un moyen de résumer l'information: dans cette situation, ce n'est certainement pas le plus approprié
- Certains intervalles ne sont pas invariants par transformation (sauf linéaire)

"a fatal disadvantage"

Agresti & Min (2005)

C'est le cas des intervalles bayésiens de plus haute densité *a posteriori* (HPD)
Le principe est d'obtenir des intervalles le plus court possible
Probabilités unilatérales différentes de $\alpha/2$ (généralement peu satisfaisant en pratique)

Autres intervalles, autres comportements donnant lieu à discussion

- Méthodes approchées:
 - peuvent donner des limites en dehors de l'intervalle $[0,1]$
- Pour $x = 0$ (aucun événement observé), la limite inférieure peut être strictement positive
 - C'est le cas de l'intervalle bayésien de Jeffreys
 - Mais conforme à la logique bayésienne
 - L'intervalle bilatéral n'est qu'un moyen de résumer l'information: dans cette situation, ce n'est certainement pas le plus approprié
- Certains intervalles ne sont pas invariant par transformation (sauf linéaire)

"a fatal disadvantage"

Agresti & Min (2005)

C'est le cas des intervalles bayésiens de plus haute densité *a posteriori* (HPD)

Le principe est d'obtenir des intervalles le plus court possible

Probabilités unilatérales différentes de $\alpha/2$ (généralement peu satisfaisant en pratique)

Autres intervalles, autres comportements donnant lieu à discussion

- Méthodes approchées:
 - peuvent donner des limites en dehors de l'intervalle $[0,1]$
- Pour $x = 0$ (aucun événement observé), la limite inférieure peut être strictement positive
 - C'est le cas de l'intervalle bayésien de Jeffreys
 - Mais conforme à la logique bayésienne
 - L'intervalle bilatéral n'est qu'un moyen de résumer l'information: dans cette situation, ce n'est certainement pas le plus approprié
- Certains intervalles ne sont pas invariants par transformation (sauf linéaire)

"a fatal disadvantage"

Agresti & Min (2005)

C'est le cas des intervalles bayésiens de plus haute densité *a posteriori* (HPD)
Le principe est d'obtenir des intervalles le plus court possible
Probabilités unilatérales différentes de $\alpha/2$ (généralement peu satisfaisant en pratique)

Débats autour du principe de vraisemblance

- L'approche fréquentiste suppose que n est fixé
- Si on a observé 6 événements pour 500 observations, aurait-on les mêmes inférences si c'était le résultat
 - d'une **analyse intermédiaire** (effectif initialement prévu $n = 1000$)?
 - d'un autre modèle d'échantillonnage, par exemple si on a décidé avant l'expérience d'arrêter celle-ci dès qu'on a observé 6 événements (x fixé, n variable) [**modèle binomial négatif**]?

Les fréquentistes répondent NON

La plupart des bayésiens répondent OUI, au nom du principe de vraisemblance

- **NB** L'intervalle de Jeffreys ne respecte pas le principe de vraisemblance
La distribution *a priori* prend en compte l'information apportée par la règle d'arrêt
- ↔ Remise en question du principe de vraisemblance sous sa forme stricte
Box & Tiao (1973), Ye (1993), de Cristofaro (2004, 2008)
Bunouf & Lecoutre (2006, 2008, 2010), de Cristofaro & Lecoutre (2009)

Débats autour du principe de vraisemblance

- L'approche fréquentiste suppose que n est fixé
- Si on a observé 6 événements pour 500 observations, aurait-on les mêmes inférences si c'était le résultat
 - d'une **analyse intermédiaire** (effectif initialement prévu $n = 1000$)?
 - d'un autre modèle d'échantillonnage, par exemple si on a décidé avant l'expérience d'arrêter celle-ci dès qu'on a observé 6 événements (x fixé, n variable) [**modèle binomial négatif**]?

Des points de vue divergents

Les fréquentistes répondent **NON**

La plupart des bayésiens répondent **OUI**, au nom du **principe de vraisemblance**

- **NB** L'intervalle de Jeffreys ne respecte pas le principe de vraisemblance
La distribution *a priori* prend en compte l'information apportée par la règle d'arrêt
- \leftrightarrow Remise en question du principe de vraisemblance sous sa forme stricte
Box & Tiao (1973), Ye (1993), de Cristofaro (2004, 2008)
Bunouf & Lecoutre (2006, 2008, 2010), de Cristofaro & Lecoutre (2008)

Débats autour du principe de vraisemblance

- L'approche fréquentiste suppose que n est fixé
- Si on a observé 6 événements pour 500 observations, aurait-on les mêmes inférences si c'était le résultat
 - d'une **analyse intermédiaire** (effectif initialement prévu $n = 1000$)?
 - d'un autre modèle d'échantillonnage, par exemple si on a décidé avant l'expérience d'arrêter celle-ci dès qu'on a observé 6 événements (x fixé, n variable) [**modèle binomial négatif**]?

Des points de vue divergents

Les fréquentistes répondent **NON**

La plupart des bayésiens répondent **OUI**, au nom du **principe de vraisemblance**

- **NB** L'intervalle de Jeffreys ne respecte pas le principe de vraisemblance
La distribution *a priori* prend en compte l'information apportée par la règle d'arrêt
- ↔ Remise en question du principe de vraisemblance sous sa forme stricte
Box & Tiao (1973), Ye (1993), de Cristofaro (2004, 2008)
Bunouf & Lecoutre (2006, 2008, 2010), de Cristofaro & Lecoutre (2008)

Débats autour du principe de vraisemblance

- L'approche fréquentiste suppose que n est fixé
- Si on a observé 6 événements pour 500 observations, aurait-on les mêmes inférences si c'était le résultat
 - d'une **analyse intermédiaire** (effectif initialement prévu $n = 1000$)?
 - d'un autre modèle d'échantillonnage, par exemple si on a décidé avant l'expérience d'arrêter celle-ci dès qu'on a observé 6 événements (x fixé, n variable) [**modèle binomial négatif**]?

Des points de vue divergents

Les fréquentistes répondent **NON**

La plupart des bayésiens répondent **OUI**, au nom du **principe de vraisemblance**

- **NB** L'intervalle de Jeffreys ne respecte pas le principe de vraisemblance
La distribution *a priori* prend en compte l'information apportée par la règle d'arrêt
- ↔ Remise en question du principe de vraisemblance sous sa forme stricte
Box & Tiao (1973), Ye (1993), de Cristofaro (2004, 2008)
Bunouf & Lecoutre (2006, 2008, 2010), de Cristofaro & Lecoutre (2008)

Débats autour du principe de vraisemblance

- L'approche fréquentiste suppose que n est fixé
- Si on a observé 6 événements pour 500 observations, aurait-on les mêmes inférences si c'était le résultat
 - d'une **analyse intermédiaire** (effectif initialement prévu $n = 1000$)?
 - d'un autre modèle d'échantillonnage, par exemple si on a décidé avant l'expérience d'arrêter celle-ci dès qu'on a observé 6 événements (x fixé, n variable) [**modèle binomial négatif**]?

Des points de vue divergents

Les fréquentistes répondent **NON**

La plupart des bayésiens répondent **OUI**, au nom du **principe de vraisemblance**

- **NB** L'intervalle de Jeffreys ne respecte pas le principe de vraisemblance
La distribution *a priori* prend en compte l'information apportée par la règle d'arrêt
- \leftrightarrow Remise en question du principe de vraisemblance sous sa forme stricte
Box & Tiao (1973), Ye (1993), de Cristofaro (2004, 2008)
Bunouf & Lecoutre (2006, 2008, 2010), de Cristofaro & Lecoutre (2008)

Une propriété hautement souhaitable

- $x = 1$ $n = 10 \mapsto$ IC $[\cdot0051, \cdot4444]$ pour φ
- Si on permute 0 et 1

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \varphi & 1 - \varphi \end{array}$$

- $x = 9$ $n = 10 \mapsto$ IC $[\cdot5556, \cdot9949]$ pour $1 - \varphi$
- ce qui implique que la limite inférieure pour l'observation x peut être calculée comme

le complément à 1 de la limite supérieure pour l'observation $n - x$

- ... et pourtant pas toujours satisfaite dans d'autres situations
- \leftrightarrow Ici on pourra se contenter de considérer le calcul de la limite supérieure

Une propriété hautement souhaitable

- $x = 1$ $n = 10 \mapsto$ IC $[\text{.0051}, \text{.4444}]$ pour φ
- Si on permute 0 et 1

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \varphi & 1 - \varphi \end{array}$$

- $x = 9$ $n = 10 \mapsto$ IC $[\text{.5556}, \text{.9949}]$ pour $1 - \varphi$
- ce qui implique que la limite inférieure pour l'observation x peut être calculée comme

le complément à 1 de la limite supérieure pour l'observation $n - x$

- ... et pourtant pas toujours satisfaite dans d'autres situations
- \leftrightarrow Ici on pourra se contenter de considérer le calcul de la limite supérieure

Une propriété hautement souhaitable

- $x = 1$ $n = 10 \mapsto$ IC $[\text{.0051}, \text{.4444}]$ pour φ
- Si on permute 0 et 1

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \varphi & 1 - \varphi \end{array}$$

- $x = 9$ $n = 10 \mapsto$ IC $[\text{.5556}, \text{.9949}]$ pour $1 - \varphi$
- ce qui implique que la limite inférieure pour l'observation x peut être calculée comme

le complément à 1 de la limite supérieure pour l'observation $n - x$

- ... et pourtant pas toujours satisfaite dans d'autres situations
- \leftrightarrow Ici on pourra se contenter de considérer le calcul de la limite supérieure

Une propriété hautement souhaitable

- $x = 1$ $n = 10 \mapsto$ IC $[\text{.0051}, \text{.4444}]$ pour φ
- Si on permute 0 et 1

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \varphi & 1 - \varphi \end{array}$$

- $x = 9$ $n = 10 \mapsto$ IC $[\text{.5556}, \text{.9949}]$ pour $1 - \varphi$
- ce qui implique que la limite inférieure pour l'observation x peut être calculée comme

le complément à 1 de la limite supérieure pour l'observation $n - x$

- ... et pourtant pas toujours satisfaite dans d'autres situations
- \leftrightarrow Ici on pourra se contenter de considérer le calcul de la limite supérieure

Une propriété hautement souhaitable

- $x = 1$ $n = 10 \mapsto$ IC $[\text{.0051}, \text{.4444}]$ pour φ
- Si on permute 0 et 1

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \varphi & 1 - \varphi \end{array}$$

- $x = 9$ $n = 10 \mapsto$ IC $[\text{.5556}, \text{.9949}]$ pour $1 - \varphi$
- ce qui implique que la limite inférieure pour l'observation x peut être calculée comme

le complément à 1 de la limite supérieure pour l'observation $n - x$

- ... et pourtant pas toujours satisfaite dans d'autres situations
- \leftrightarrow Ici on pourra se contenter de considérer le calcul de la limite supérieure

Une propriété hautement souhaitable

- $x = 1$ $n = 10 \mapsto$ IC $[\text{.0051}, \text{.4444}]$ pour φ
- Si on permute 0 et 1

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \varphi & 1 - \varphi \end{array}$$

- $x = 9$ $n = 10 \mapsto$ IC $[\text{.5556}, \text{.9949}]$ pour $1 - \varphi$
- ce qui implique que la limite inférieure pour l'observation x peut être calculée comme

le complément à 1 de la limite supérieure pour l'observation $n - x$

- ... et pourtant pas toujours satisfaite dans d'autres situations
- \hookrightarrow Ici on pourra se contenter de considérer le calcul de la limite supérieure

"Fonction d'acceptation" $\alpha(\varphi_0, x)$ (test bilatéral exact)

- $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X \leq x)$
 $P_{\text{right}}(\varphi_0, y) = \Pr_{\varphi_0}(X \geq y) = 1 - B_{(n, \varphi_0)}(y) \quad (0 \leq y \leq n+1)$

Si $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) < P_{\text{right}}(\varphi_0, x)$

alors $\alpha(\varphi_0, x) = P_{\text{left}}(\varphi_0, x) + P_{\text{right}}(\varphi_0, x_{\text{right}}(\varphi_0, x))$

où $x_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ est le plus petit entier y tel que

$$P_{\text{right}}(\varphi_0, x_{\text{right}}(\varphi_0, x)) \leq P_{\text{left}}(\varphi_0, x)$$

- Si $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) > P_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ $x \mapsto n - x$ et $\varphi_0 \mapsto 1 - \varphi_0$
- $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = P_{\text{right}}(\varphi_0, x) \Rightarrow \alpha(\varphi_0, x) = 1$
- $x_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ peut être calculée à partir des quantiles de la distribution binomiale $B_{(n, \varphi_0)}^{-1}[1 - P_{\text{left}}(\varphi_0, x)]$

Par exemple: par la fonction R et S-Plus `qbinom`

"Fonction d'acceptation" $\alpha(\varphi_0, x)$ (test bilatéral exact)

- $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X \leq x)$
 $P_{\text{right}}(\varphi_0, y) = \Pr_{\varphi_0}(X \geq y) = 1 - B_{(n, \varphi_0)}(y) \quad (0 \leq y \leq n+1)$

Si $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) < P_{\text{right}}(\varphi_0, x)$

alors $\alpha(\varphi_0, x) = P_{\text{left}}(\varphi_0, x) + P_{\text{right}}(\varphi_0, x_{\text{right}}(\varphi_0, x))$

où $x_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ est le plus petit entier y tel que

$$P_{\text{right}}(\varphi_0, x_{\text{right}}(\varphi_0, x)) \leq P_{\text{left}}(\varphi_0, x)$$

- Si $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) > P_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ $x \mapsto n - x$ et $\varphi_0 \mapsto 1 - \varphi_0$
- $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = P_{\text{right}}(\varphi_0, x) \Rightarrow \alpha(\varphi_0, x) = 1$
- $x_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ peut être calculée à partir des quantiles de la distribution binomiale $B_{(n, \varphi_0)}^{-1}[1 - P_{\text{left}}(\varphi_0, x)]$

Par exemple: par la fonction R et S-Plus **qbinom**

"Fonction d'acceptation" $\alpha(\varphi_0, x)$ (test bilatéral exact)

- $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X \leq x)$
 $P_{\text{right}}(\varphi_0, y) = \Pr_{\varphi_0}(X \geq y) = 1 - B_{(n, \varphi_0)}(y) \quad (0 \leq y \leq n+1)$

Si $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) < P_{\text{right}}(\varphi_0, x)$

alors $\alpha(\varphi_0, x) = P_{\text{left}}(\varphi_0, x) + P_{\text{right}}(\varphi_0, x_{\text{right}}(\varphi_0, x))$

où $x_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ est le plus petit entier y tel que

$$P_{\text{right}}(\varphi_0, x_{\text{right}}(\varphi_0, x)) \leq P_{\text{left}}(\varphi_0, x)$$

- Si $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) > P_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ $x \mapsto n - x$ et $\varphi_0 \mapsto 1 - \varphi_0$
- $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = P_{\text{right}}(\varphi_0, x) \Rightarrow \alpha(\varphi_0, x) = 1$
- $x_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ peut être calculée à partir des quantiles de la distribution binomiale $B_{(n, \varphi_0)}^{-1}[1 - P_{\text{left}}(\varphi_0, x)]$

Par exemple: par la fonction R et S-Plus **qbinom**

"Fonction d'acceptation" $\alpha(\varphi_0, x)$ (test bilatéral exact)

- $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X \leq x)$
 $P_{\text{right}}(\varphi_0, y) = \Pr_{\varphi_0}(X \geq y) = 1 - B_{(n, \varphi_0)}(y) \quad (0 \leq y \leq n+1)$

Si $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) < P_{\text{right}}(\varphi_0, x)$

alors $\alpha(\varphi_0, x) = P_{\text{left}}(\varphi_0, x) + P_{\text{right}}(\varphi_0, x_{\text{right}}(\varphi_0, x))$

où $x_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ est le plus petit entier y tel que

$$P_{\text{right}}(\varphi_0, x_{\text{right}}(\varphi_0, x)) \leq P_{\text{left}}(\varphi_0, x)$$

- Si $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) > P_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ $x \mapsto n - x$ et $\varphi_0 \mapsto 1 - \varphi_0$
- $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = P_{\text{right}}(\varphi_0, x) \Rightarrow \alpha(\varphi_0, x) = 1$
- $x_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ peut être calculée à partir des quantiles de la distribution binomiale $B_{(n, \varphi_0)}^{-1}[1 - P_{\text{left}}(\varphi_0, x)]$

Par exemple: par la fonction R et S-Plus **qbinom**

"Fonction d'acceptation" $\alpha(\varphi_0, x)$ (test bilatéral exact)

- $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X \leq x)$
 $P_{\text{right}}(\varphi_0, y) = \Pr_{\varphi_0}(X \geq y) = 1 - B_{(n, \varphi_0)}(y) \quad (0 \leq y \leq n+1)$

Si $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) < P_{\text{right}}(\varphi_0, x)$

alors $\alpha(\varphi_0, x) = P_{\text{left}}(\varphi_0, x) + P_{\text{right}}(\varphi_0, x_{\text{right}}(\varphi_0, x))$

où $x_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ est le plus petit entier y tel que

$$P_{\text{right}}(\varphi_0, x_{\text{right}}(\varphi_0, x)) \leq P_{\text{left}}(\varphi_0, x)$$

- Si $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) > P_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ $x \mapsto n - x$ et $\varphi_0 \mapsto 1 - \varphi_0$
- $P_{\text{left}}(\varphi_0, x) = P_{\text{right}}(\varphi_0, x) \Rightarrow \alpha(\varphi_0, x) = 1$
- $x_{\text{right}}(\varphi_0, x)$ peut être calculée à partir des quantiles de la distribution binomiale $B_{(n, \varphi_0)}^{-1}[1 - P_{\text{left}}(\varphi_0, x)]$

Par exemple: par la fonction R et S-Plus **qbinom**

Limite supérieure U_{α}^B : inversion du test précédent

- C'est la plus grande valeur acceptée par le test au seuil α

$$\alpha(\varphi_0, x) \geq \alpha$$

- L'intervalle de Blaker est toujours contenu dans l'intervalle de Clopper-Pearson
- Blaker (2000, 2001) a donné une fonction S-Plus qui calcule permet de calculer la limite supérieure par décrémentation successive

On part de $\varphi_0 = U_{\alpha}^{CP}$

On décrémente de ϵ (qui contrôle la précision) tant que

$$\alpha(\varphi_0, x) < \alpha$$

Limite supérieure U_{α}^B : inversion du test précédent

- C'est la plus grande valeur acceptée par le test au seuil α

$$\alpha(\varphi_0, x) \geq \alpha$$

- L'intervalle de Blaker est toujours contenu dans l'intervalle de Clopper-Pearson
- Blaker (2000, 2001) a donné une fonction S-Plus qui calcule permet de calculer la limite supérieure par décrémentation successive

On part de $\varphi_0 = U_{\alpha}^{CP}$

On décrémente de ϵ (qui contrôle la précision) tant que

$$\alpha(\varphi_0, x) < \alpha$$

Limite supérieure U_{α}^B : inversion du test précédent

- C'est la plus grande valeur acceptée par le test au seuil α

$$\alpha(\varphi_0, x) \geq \alpha$$

- L'intervalle de Blaker est toujours contenu dans l'intervalle de Clopper-Pearson
- Blaker (2000, 2001) a donné une fonction S-Plus qui calcule permet de calculer la limite supérieure par décrémentation successives

On part de $\varphi_0 = U_{\alpha}^{CP}$

On décrémente de ϵ (qui contrôle la précision) tant que

$$\alpha(\varphi_0, x) < \alpha$$

Algorithme très peu performant

- Calculs extrêmement intensifs: une bonne précision numérique (événements rares...) nécessite un petit ϵ et est difficilement atteignable en pratique
- $\epsilon = 10^{-8} \mapsto$ plus d'un an pour construire la table de tous les intervalles (un peu plus de 500 000) jusqu'à $n = 1000$
- L'algorithme peut échouer!
Quand ϵ n'est pas assez précis (Klaschka, 2010)
Car la fonction $\alpha(\varphi_0, x)$ n'est pas continue

Exemple $x = 2$ $n = 123$

l'algorithme retourne

pour $\epsilon = .00001$: 0.0575 (limite correcte)

pour $\epsilon = .0001$: 0.0552

Algorithme très peu performant

- Calculs extrêmement intensifs: une bonne précision numérique (événements rares...) nécessite un petit ϵ et est difficilement atteignable en pratique
- $\epsilon = 10^{-8} \mapsto$ plus d'un an pour construire la table de tous les intervalles (un peu plus de 500 000) jusqu'à $n = 1000$
- L'algorithme peut échouer!
Quand ϵ n'est pas assez précis (Klaschka, 2010)
Car la fonction $\alpha(\varphi_0, x)$ n'est pas continue

Exemple $x = 2$ $n = 123$

l'algorithme retourne

pour $\epsilon = .00001$: 0.0575 (limite correcte)

pour $\epsilon = .0001$: 0.0552

Algorithme très peu performant

- Calculs extrêmement intensifs: une bonne précision numérique (événements rares...) nécessite un petit ϵ et est difficilement atteignable en pratique
- $\epsilon = 10^{-8} \mapsto$ plus d'un an pour construire la table de tous les intervalles (un peu plus de 500 000) jusqu'à $n = 1000$
- **L'algorithme peut échouer!**
Quand ϵ n'est pas assez précis (Klaschka, 2010)
Car la fonction $\alpha(\varphi_0, x)$ n'est pas continue

Exemple $x = 2$ $n = 123$

l'algorithme retourne

pour $\epsilon = .00001$: 0.0575 (limite correcte)

pour $\epsilon = .0001$: 0.0552

Algorithme très peu performant

- Calculs extrêmement intensifs: une bonne précision numérique (événements rares...) nécessite un petit ϵ et est difficilement atteignable en pratique
- $\epsilon = 10^{-8} \mapsto$ plus d'un an pour construire la table de tous les intervalles (un peu plus de 500 000) jusqu'à $n = 1000$
- **L'algorithme peut échouer!**
Quand ϵ n'est pas assez précis (Klaschka, 2010)
Car la fonction $\alpha(\varphi_0, x)$ n'est pas continue

Exemple $x = 2$ $n = 123$

l'algorithme retourne

pour $\epsilon = .00001$: 0.0575 (limite correcte)

pour $\epsilon = .0001$: 0.0552

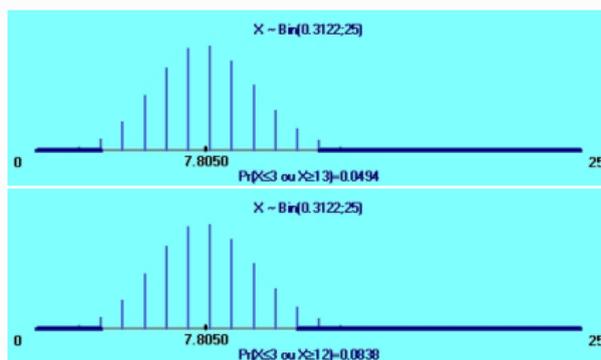
Un nouvel algorithme (Lecoutre & Poitevineau, 2011)

- Le principe est de déterminer la valeur de $x_{\text{right}}(U_{\alpha}^B, x)$ pour éviter le calcul des quantiles de la distribution binomiale
- On calcule $x_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$

Exemple $x = 3$ $n = 25$

$$U_{.05}^{\text{CP}} = .3122 \mapsto x_{\text{right}}(.3122, 3) = 13$$

$$P_{\text{left}}(.3122, 3) = .0250 \quad P_{\text{right}}(.3122, 13) = .0244 \quad P_{\text{right}}(.3122, 12) = .0588$$



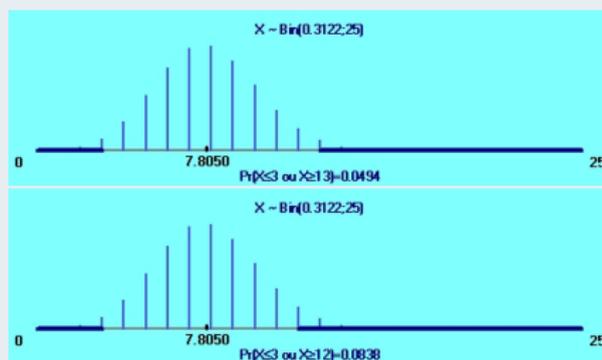
Un nouvel algorithme (Lecoutre & Poitevineau, 2011)

- Le principe est de déterminer la valeur de $x_{\text{right}}(U_{\alpha}^B, x)$ pour éviter le calcul des quantiles de la distribution binomiale
- On calcule $x_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$

Exemple $x = 3$ $n = 25$

$$U_{.05}^{\text{CP}} = .3122 \mapsto x_{\text{right}}(.3122, 3) = 13$$

$$P_{\text{left}}(.3122, 3) = .0250 \quad P_{\text{right}}(.3122, 13) = .0244 \quad P_{\text{right}}(.3122, 12) = .0588$$



On montre que

- $x_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x)$ qu'on notera plus simplement x_{right}^* ne peut prendre que l'une des deux valeurs

$$x_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) \text{ ou } x_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$$

- Remarque

$$U_{2\alpha}^{\text{CP}} \leq U_{\alpha}^{\text{B}} \leq U_{\alpha}^{\text{CP}}$$

On montre que

- $x_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x)$ qu'on notera plus simplement x_{right}^* ne peut prendre que l'une des deux valeurs

$$x_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) \text{ ou } x_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$$

- **Remarque**

$$U_{2\alpha}^{\text{CP}} \leq U_{\alpha}^{\text{B}} \leq U_{\alpha}^{\text{CP}}$$

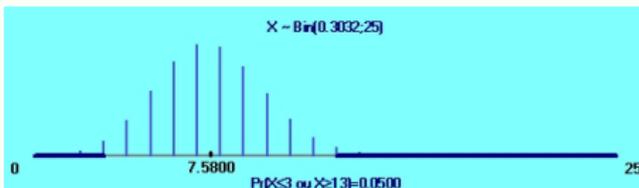
(1) Si $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$

- U_{α}^{B} est donnée par

$$\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = P_{\text{left}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x) + P_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x_{\text{right}}^*) = \alpha$$

- Exemple $x = 3$ $n = 25 \mapsto x_{\text{right}}^* = 13$

\mapsto On obtient $U_{.05}^{\text{B}} = .3032$ ($U_{.10}^{\text{CP}} = .2817$ et $U_{.05}^{\text{CP}} = .3122$)



$$\xi(0.3032, 3, 13) = .05$$

- $\xi(U_{2\alpha}^{\text{CP}}, x, x_{\text{right}}^*) \geq \alpha$ et $\xi(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x, x_{\text{right}}^*) \leq \alpha$
- $\xi(\varphi_0, x, x_{\text{right}}^*)$ a un minimum pour $\varphi_0 = \frac{\rho}{1+\rho}$

$$\text{où } \rho = \left(\frac{\Gamma(x_{\text{right}}^*) \Gamma(n - x_{\text{right}}^* + 1)}{\Gamma(x+1) \Gamma(n-x)} \right)^{1/(x_{\text{right}}^* - x - 1)}$$

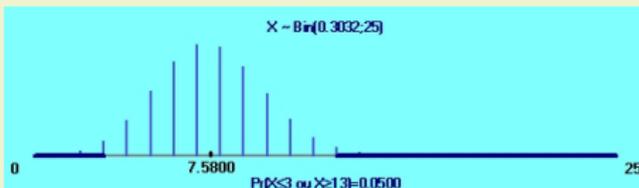
(1) Si $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$

- U_{α}^{B} est donnée par

$$\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = P_{\text{left}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x) + P_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x_{\text{right}}^*) = \alpha$$

- Exemple** $x = 3$ $n = 25 \mapsto x_{\text{right}}^* = 13$

\leftrightarrow On obtient $U_{.05}^{\text{B}} = .3032$ ($U_{.10}^{\text{CP}} = .2817$ et $U_{.05}^{\text{CP}} = .3122$)



$$\xi(0.3032, 3, 13) = .05$$

- $\xi(U_{2\alpha}^{\text{CP}}, x, x_{\text{right}}^*) \geq \alpha$ et $\xi(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x, x_{\text{right}}^*) \leq \alpha$
- $\xi(\varphi_0, x, x_{\text{right}}^*)$ a un minimum pour $\varphi_0 = \frac{\rho}{1+\rho}$

$$\text{où } \rho = \left(\frac{\Gamma(x_{\text{right}}^*) \Gamma(n - x_{\text{right}}^* + 1)}{\Gamma(x+1) \Gamma(n-x)} \right)^{1/(x_{\text{right}}^* - x - 1)}$$

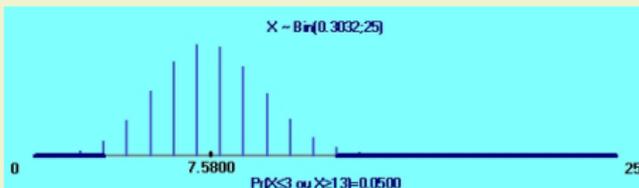
(1) Si $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$

- U_{α}^{B} est donnée par

$$\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = P_{\text{left}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x) + P_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x_{\text{right}}^*) = \alpha$$

- Exemple** $x = 3$ $n = 25 \mapsto x_{\text{right}}^* = 13$

\leftrightarrow On obtient $U_{.05}^{\text{B}} = .3032$ ($U_{.10}^{\text{CP}} = .2817$ et $U_{.05}^{\text{CP}} = .3122$)



$$\xi(0.3032, 3, 13) = .05$$

- $\xi(U_{2\alpha}^{\text{CP}}, x, x_{\text{right}}^*) \geq \alpha$ et $\xi(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x, x_{\text{right}}^*) \leq \alpha$

- $\xi(\varphi_0, x, x_{\text{right}}^*)$ a un minimum pour $\varphi_0 = \frac{\rho}{1+\rho}$

$$\text{où } \rho = \left(\frac{\Gamma(x_{\text{right}}^*) \Gamma(n - x_{\text{right}}^* + 1)}{\Gamma(x + 1) \Gamma(n - x)} \right)^{1/(x_{\text{right}}^* - x - 1)}$$

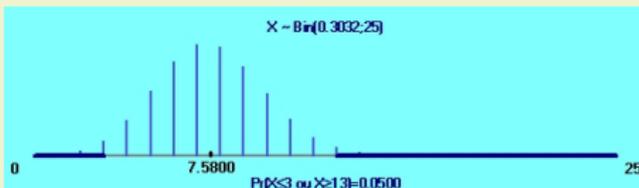
(1) Si $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$

- U_{α}^{B} est donnée par

$$\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = P_{\text{left}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x) + P_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x_{\text{right}}^*) = \alpha$$

- Exemple** $x = 3$ $n = 25 \mapsto x_{\text{right}}^* = 13$

\leftrightarrow On obtient $U_{.05}^{\text{B}} = .3032$ ($U_{.10}^{\text{CP}} = .2817$ et $U_{.05}^{\text{CP}} = .3122$)



$$\xi(0.3032, 3, 13) = .05$$

- $\xi(U_{2\alpha}^{\text{CP}}, x, x_{\text{right}}^*) \geq \alpha$ et $\xi(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x, x_{\text{right}}^*) \leq \alpha$
- $\xi(\varphi_0, x, x_{\text{right}}^*)$ a un minimum pour $\varphi_0 = \frac{\rho}{1+\rho}$

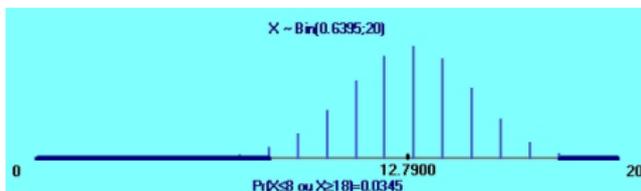
$$\text{où } \rho = \left(\frac{\Gamma(x_{\text{right}}^*) \Gamma(n - x_{\text{right}}^* + 1)}{\Gamma(x+1) \Gamma(n-x)} \right)^{1/(x_{\text{right}}^* - x - 1)}$$

(2) Si $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$

- U_{α}^{B} est donnée par

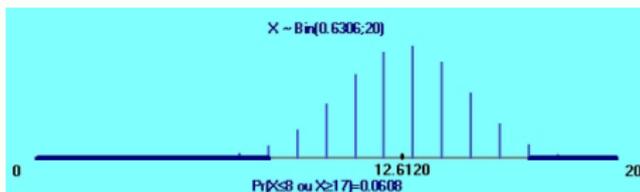
$$\zeta(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = P_{\text{left}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x) - P_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x_{\text{right}}^*) = 0$$

- Exemple $x = 8$ $n = 20 \mapsto x_{\text{right}}^* = 17$



$$x_{\text{right}}^*(U_{.05}^{\text{CP}}, 8) = 18$$

\mapsto On obtient $U_{.05}^{\text{B}} = .6306$ ($U_{.10}^{\text{CP}} = .6064$ et $U_{.05}^{\text{CP}} = .6395$)



$$\Rightarrow \xi(.6306, 8, 17) > .05!$$

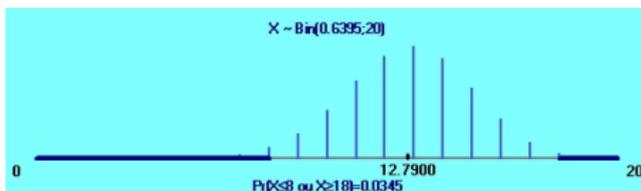
$$P_{\text{left}}(.6306, 8) = P_{\text{right}}(.6306, 17) = .0304$$

(2) Si $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$

- U_{α}^{B} est donnée par

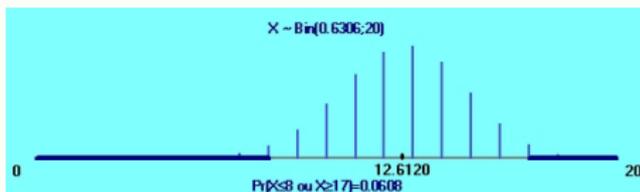
$$\zeta(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = P_{\text{left}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x) - P_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x_{\text{right}}^*) = 0$$

- Exemple** $x = 8$ $n = 20 \mapsto x_{\text{right}}^* = 17$



$$x_{\text{right}}^*(U_{.05}^{\text{CP}}, 8) = 18$$

\mapsto On obtient $U_{.05}^{\text{B}} = .6306$ ($U_{.10}^{\text{CP}} = .6064$ et $U_{.05}^{\text{CP}} = .6395$)



$$\Rightarrow \xi(.6306, 8, 17) > .05!$$

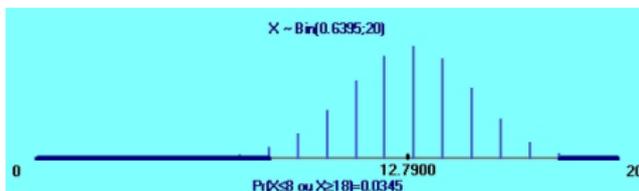
$$P_{\text{left}}(.6306, 8) = P_{\text{right}}(.6306, 17) = .0304$$

(2) Si $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$

- U_{α}^{B} est donnée par

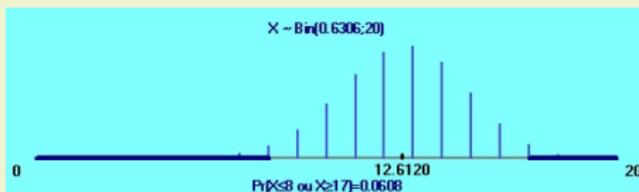
$$\zeta(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = P_{\text{left}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x) - P_{\text{right}}(U_{\alpha}^{\text{B}}, x_{\text{right}}^*) = 0$$

- Exemple** $x = 8$ $n = 20 \mapsto x_{\text{right}}^* = 17$



$$x_{\text{right}}^*(U_{.05}^{\text{CP}}, 8) = 18$$

\mapsto On obtient $U_{.05}^{\text{B}} = .6306$ ($U_{.10}^{\text{CP}} = .6064$ et $U_{.05}^{\text{CP}} = .6395$)



$$\Rightarrow \zeta(.6306, 8, 17) > .05!$$

$$P_{\text{left}}(.6306, 8) = P_{\text{right}}(.6306, 17) = .0304$$

Principe de l'algorithme

- On calcule $U_{2\alpha}^{\text{CP}}$, U_{α}^{CP} et $x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$
- On suppose $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$

et on résoud $\zeta(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = 0$

- Si $\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)) < \alpha$ alors c'est la solution
- Sinon $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$

et on résoud $\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = \alpha$

- $\epsilon = 10^{-12}$

↔ Quelques minutes pour construire la table de tous les intervalles
(un peu plus de 500 000) jusqu'à $n = 1000$ (Blaker $\approx 1\,200$ ans)

Principe de l'algorithme

- On calcule $U_{2\alpha}^{\text{CP}}$, U_{α}^{CP} et $x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$
- On suppose $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$

et on résoud $\zeta(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = 0$

- Si $\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)) < \alpha$ alors c'est la solution
- Sinon $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$

et on résoud $\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = \alpha$

- $\epsilon = 10^{-12}$

↪ Quelques minutes pour construire la table de tous les intervalles
(un peu plus de 500 000) jusqu'à $n = 1000$ (Blaker $\approx 1\,200$ ans)

Principe de l'algorithme

- On calcule $U_{2\alpha}^{\text{CP}}$, U_{α}^{CP} et $x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$
- On suppose $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$

et on résoud $\zeta(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = 0$

- Si $\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)) < \alpha$ alors c'est la solution
- Sinon $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$

et on résoud $\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = \alpha$

- $\epsilon = 10^{-12}$

↪ Quelques minutes pour construire la table de tous les intervalles
(un peu plus de 500 000) jusqu'à $n = 1000$ (Blaker $\approx 1\,200$ ans)

Principe de l'algorithme

- On calcule $U_{2\alpha}^{\text{CP}}$, U_{α}^{CP} et $x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$
- On suppose $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$

et on résoud $\zeta(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = 0$

- Si $\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)) < \alpha$ alors c'est la solution
- Sinon $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$

et on résoud $\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = \alpha$

- $\epsilon = 10^{-12}$

↪ Quelques minutes pour construire la table de tous les intervalles
(un peu plus de 500 000) jusqu'à $n = 1000$ (Blaker $\approx 1\,200$ ans)

Principe de l'algorithme

- On calcule $U_{2\alpha}^{\text{CP}}$, U_{α}^{CP} et $x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$
- On suppose $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$

et on résoud $\zeta(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = 0$

- Si $\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)) < \alpha$ alors c'est la solution
- Sinon $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x)$

et on résoud $\xi(U_{\alpha}^{\text{B}}, x, x_{\text{right}}^*) = \alpha$

- $\epsilon = 10^{-12}$

↪ Quelques minutes pour construire la table de tous les intervalles (un peu plus de 500 000) jusqu'à $n = 1000$ (Blaker $\approx 1\,200$ ans)

Comportements indésirables (cf Vos & Hudson (2008)

- Inhérent aux distributions discrètes et certains sont le prix à payer pour améliorer le taux de couverture bilatéral de Clopper-Pearson
- La limite n'est pas une fonction strictement monotone de la confiance

$$x = 8 \quad n = 20$$

La même limite $U_{\alpha}^B = 0.6306$ est obtenue pour tous les $\alpha \in [0.0382, 0.0607]$

- Du aux discontinuités (voir Blaker, 2000, Corollaire 1, p. 786)

$$\alpha \in [0.0382, 0.0607] \mapsto 0.6306 \quad \alpha = 0.0608 \mapsto .6303$$

Néanmoins, l'intervalle de Blaker satisfait la condition d'emboîtement

- Quand $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$, l'intervalle peut contenir des valeurs φ_0 telles que $\alpha(\varphi_0, x) < \alpha$, rejetées par la fonction d'acceptation

Comportements indésirables (cf Vos & Hudson (2008)

- Inhérent aux distributions discrètes et certains sont le prix à payer pour améliorer le taux de couverture bilatéral de Clopper-Pearson
- La limite n'est pas une fonction strictement monotone de la confiance

$$x = 8 \quad n = 20$$

La même limite $U_{\alpha}^B = 0.6306$ est obtenue pour tous les $\alpha \in [0.0382, 0.0607]$

- Du aux discontinuités (voir Blaker, 2000, Corollaire 1, p. 786)

$$\alpha \in [0.0382, 0.0607] \mapsto 0.6306 \quad \alpha = 0.0608 \mapsto .6303$$

Néanmoins, l'intervalle de Blaker satisfait la condition d'emboîtement

- Quand $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$, l'intervalle peut contenir des valeurs φ_0 telles que $\alpha(\varphi_0, x) < \alpha$, rejetées par la fonction d'acceptation

Comportements indésirables (cf Vos & Hudson (2008)

- Inhérent aux distributions discrètes et certains sont le prix à payer pour améliorer le taux de couverture bilatéral de Clopper-Pearson
- La limite n'est pas une fonction strictement monotone de la confiance

$$x = 8 \quad n = 20$$

La même limite $U_{\alpha}^B = 0.6306$ est obtenue pour tous les $\alpha \in [0.0382, 0.0607]$

- Du aux discontinuités (voir Blaker, 2000, Corollaire 1, p. 786)

$$\alpha \in [0.0382, 0.0607] \mapsto 0.6306 \quad \alpha = 0.0608 \mapsto .6303$$

Néanmoins, l'intervalle de Blaker satisfait la condition d'emboîtement

- Quand $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$, l'intervalle peut contenir des valeurs φ_0 telles que $\alpha(\varphi_0, x) < \alpha$, **rejetées** par la fonction d'acceptation

Comportements indésirables (cf Vos & Hudson (2008)

- Inhérent aux distributions discrètes et certains sont le prix à payer pour améliorer le taux de couverture bilatéral de Clopper-Pearson
- La limite n'est pas une fonction strictement monotone de la confiance

$$x = 8 \quad n = 20$$

La même limite $U_{\alpha}^B = 0.6306$ est obtenue pour tous les $\alpha \in [0.0382, 0.0607]$

- Du aux discontinuités (voir Blaker, 2000, Corollaire 1, p. 786)

$$\alpha \in [0.0382, 0.0607] \mapsto 0.6306 \quad \alpha = 0.0608 \mapsto .6303$$

Néanmoins, l'intervalle de Blaker satisfait la condition d'emboîtement

- Quand $x_{\text{right}}^* = x_{\text{right}}^*(U_{\alpha}^{\text{CP}}, x) - 1$, l'intervalle peut contenir des valeurs φ_0 telles que $\alpha(\varphi_0, x) < \alpha$, **rejetées** par la fonction d'acceptation

Une correction simple pour la non-monotonie en n

- U_{α}^B peut être une fonction non-monotone de n
Sans doute la propriété **la plus indésirable**
- L'algorithme permet de rechercher systématiquement et d'identifier ces cas en calculant les limites pour $n+1, n+2, \dots$
Si une limite plus grande est trouvée pour x et $n' > n$, elle est prise comme limite pour x et n
- Exemple

$$x = 1 \quad n = 9, \quad \alpha = .05$$

La limite supérieure .4435 de l'intervalle de Blaker est changée en .4444, la limite pour $x = 1$ et $n = 10$

- Le taux de couverture est **pratiquement inchangé**

Une correction simple pour la non-monotonie en n

- U_{α}^B peut être une fonction non-monotone de n
Sans doute la propriété **la plus indésirable**
- L'algorithme permet de rechercher systématiquement et d'identifier ces cas en calculant les limites pour $n+1, n+2, \dots$
Si une limite plus grande est trouvée pour x et $n' > n$, elle est prise comme limite pour x et n
- Exemple

$$x = 1 \quad n = 9, \quad \alpha = .05$$

La limite supérieure .4435 de l'intervalle de Blaker est changée en .4444, la limite pour $x = 1$ et $n = 10$

- Le taux de couverture est **pratiquement inchangé**

Une correction simple pour la non-monotonie en n

- U_{α}^B peut être une fonction non-monotone de n
Sans doute la propriété **la plus indésirable**
- L'algorithme permet de rechercher systématiquement et d'identifier ces cas en calculant les limites pour $n+1, n+2, \dots$
Si une limite plus grande est trouvée pour x et $n' > n$, elle est prise comme limite pour x et n
- Exemple

$$x = 1 \quad n = 9, \quad \alpha = .05$$

La limite supérieure .4435 de l'intervalle de Blaker est changée en .4444, la limite pour $x = 1$ et $n = 10$

- Le taux de couverture est **pratiquement inchangé**

Une correction simple pour la non-monotonie en n

- U_{α}^B peut être une fonction non-monotone de n
Sans doute la propriété **la plus indésirable**
- L'algorithme permet de rechercher systématiquement et d'identifier ces cas en calculant les limites pour $n+1, n+2, \dots$
Si une limite plus grande est trouvée pour x et $n' > n$, elle est prise comme limite pour x et n
- Exemple

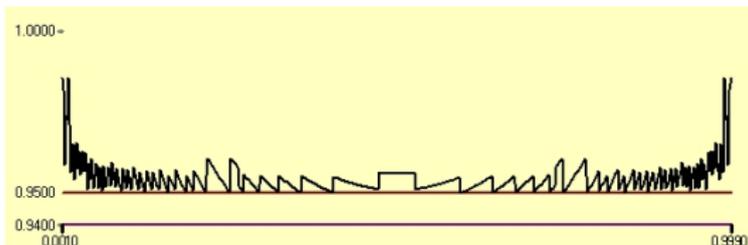
$$x = 1 \quad n = 9, \quad \alpha = .05$$

La limite supérieure .4435 de l'intervalle de Blaker est changée en .4444, la limite pour $x = 1$ et $n = 10$

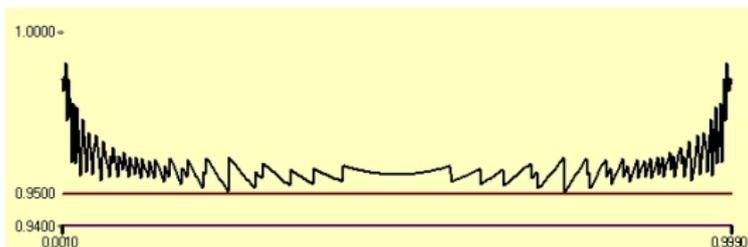
- Le taux de couverture est **pratiquement inchangé**

Blaker vs Clopper-Pearson – $n=500$, IC 95%

Blaker

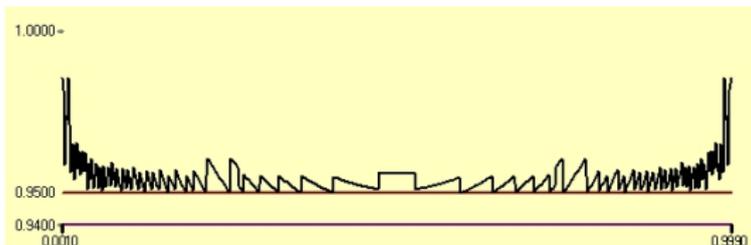


Clopper-Pearson

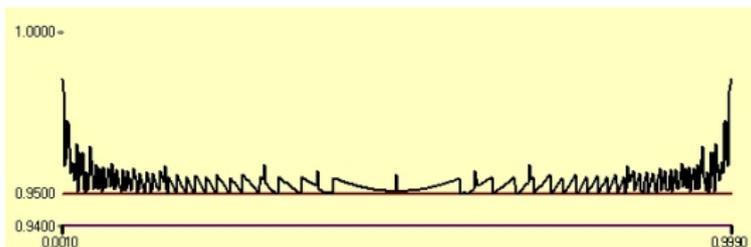


Blaker vs Blyth-Still-Casella – $n=500$, IC 95%

Blaker



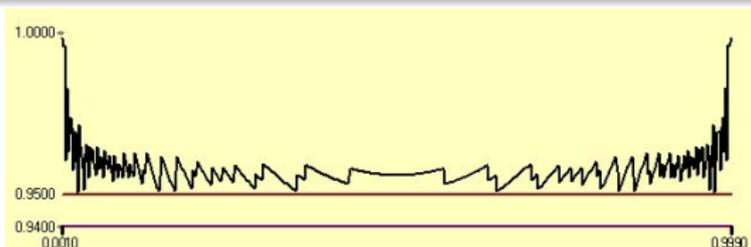
Blyth-Still-Casella



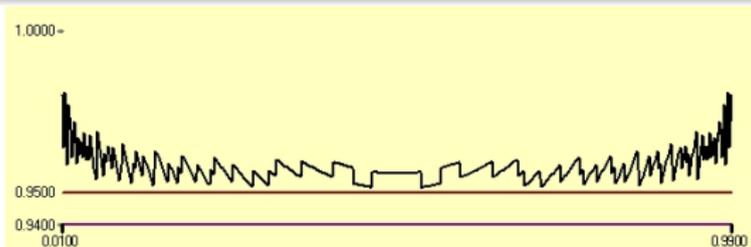
Transformation Arc sinus + correction – n=500, IC 95%

Limite supérieure pour $\text{Arcsin}\sqrt{\varphi}$

$$U_{\alpha}^{\text{ASC}} = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{x+\frac{1}{2}}{n}} + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad (\text{"corrigé"})$$



$$U_{\alpha}^{\text{ASC}^{\text{M}}} = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{x+\frac{7}{8}}{n+\frac{3}{4}}} + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \quad (\text{"corrigé modifié"})$$



Partie I - Inférence sur une proportion

- 1 Les intervalles bilatéraux exacts
 - L'intervalle de Clopper-Pearson (1934)
 - Clopper-Pearson et intervalles exacts "optimaux"
 - L'intervalle de Blaker (2000) / Cox & Hinkley (1974)
 - Des intervalles approximés quasi exacts
- 2 Des intervalles 'exacts' approchés
 - Anti-exacts
 - Inférence *floue* - Probabilités *imprécises*
 - Approchés: *mid-P*, bayésien (Jeffreys)
 - Approchés: *w-P*
- 3 Intervalles approximés et approchés
 - Intervalle de Wald (approximation normale) et modifications
 - Raffinements
 - Des nombreuse autres méthodes
- 4 Comparaison des méthodes
 - Événements rares
 - Taux de couverture bilatéral
 - Taux d'erreur unilatéraux
 - ... et l'intervalle de Blaker?

Inclure ou exclure?

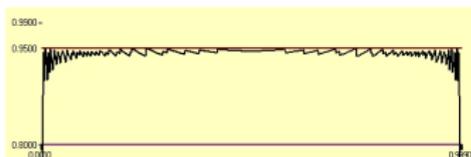
- Clopper-Pearson: exact car x est inclus dans la zone de rejet:

$$P_{\text{left}}^{\text{inc}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X \leq x)$$

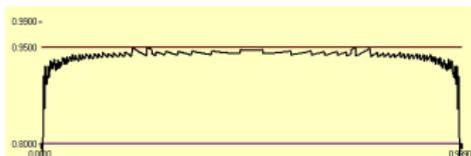
- "Anti-exact" si x est exclu:

$$P_{\text{left}}^{\text{exc}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X < x) = B_{(n, \varphi_0)}(x - 1)$$

La limite supérieure est la limite de l'intervalle de crédibilité bayésien pour l'*a priori* bêta(0, 1), au lieu de bêta(1, 0)



- Application à l'intervalle de Blaker



Inclure ou exclure?

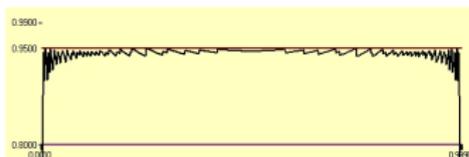
- Clopper-Pearson: exact car x est inclus dans la zone de rejet:

$$P_{\text{left}}^{\text{inc}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X \leq x)$$

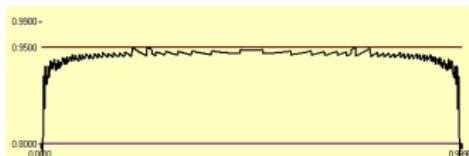
- "Anti-exact" si x est exclu:

$$P_{\text{left}}^{\text{exc}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X < x) = B_{(n, \varphi_0)}(x - 1)$$

La limite supérieure est la limite de l'intervalle de crédibilité bayésien pour l'*a priori* $\text{bêta}(0, 1)$, au lieu de $\text{bêta}(1, 0)$



- Application à l'intervalle de Blaker



Inclure ou exclure?

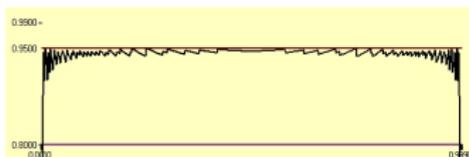
- Clopper-Pearson: exact car x est inclus dans la zone de rejet:

$$P_{\text{left}}^{\text{inc}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X \leq x)$$

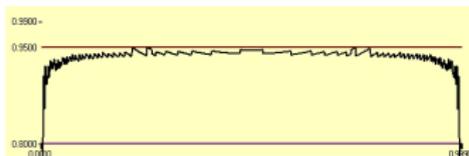
- "Anti-exact" si x est exclu:

$$P_{\text{left}}^{\text{exc}}(\varphi_0, x) = \Pr_{\varphi_0}(X < x) = B_{(n, \varphi_0)}(x - 1)$$

La limite supérieure est la limite de l'intervalle de crédibilité bayésien pour l'*a priori* $\text{bêta}(0, 1)$, au lieu de $\text{bêta}(1, 0)$



- Application à l'intervalle de Blaker



Inférence floue (Geyer & Meeden, 2005)

- "Fuzzy confidence interval"
(propriétés d'exactitude et d'optimalité)
- Donné par la fonction

$$1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0)$$

ϕ est la fonction critique d'un test randomisé de l'hypothèse nulle $H_0 : \varphi = \varphi_0$

- Tous les φ_0 pour lesquels $1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) = 1$ sont inclus dans l'intervalle (le *coeur*)
- Tous les φ_0 pour lesquels $1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) = 0$ sont exclus
- Pour les valeurs restantes $0 < 1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) < 1$ donne le "degré d'appartenance" de φ_0 à l'intervalle
Ajoutées au coeur ces valeurs constituent le *support*
- Calculs complexes...

Inférence floue (Geyer & Meeden, 2005)

- “Fuzzy confidence interval”
(propriétés d'exactitude et d'optimalité)
- Donné par la fonction

$$1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0)$$

ϕ est la fonction critique d'un test randomisé de l'hypothèse nulle $H_0 : \varphi = \varphi_0$

- Tous les φ_0 pour lesquels $1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) = 1$ sont inclus dans l'intervalle (le *coeur*)
- Tous les φ_0 pour lesquels $1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) = 0$ sont exclus
- Pour les valeurs restantes $0 < 1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) < 1$ donne le “degré d'appartenance” de φ_0 à l'intervalle
Ajoutées au coeur ces valeurs constituent le *support*
- Calculs complexes...

Inférence *floue* (Geyer & Meeden, 2005)

- “Fuzzy confidence interval”
(propriétés d'exactitude et d'optimalité)
- Donné par la fonction

$$1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0)$$

ϕ est la fonction critique d'un test randomisé de l'hypothèse nulle $H_0 : \varphi = \varphi_0$

- Tous les φ_0 pour lesquels $1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) = 1$ sont inclus dans l'intervalle (le *coeur*)
- Tous les φ_0 pour lesquels $1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) = 0$ sont exclus
- Pour les valeurs restantes $0 < 1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) < 1$ donne le “degré d'appartenance” de φ_0 à l'intervalle
Ajoutées au coeur ces valeurs constituent le *support*
- Calculs complexes...

Inférence floue (Geyer & Meeden, 2005)

- “Fuzzy confidence interval”
(propriétés d'exactitude et d'optimalité)
- Donné par la fonction

$$1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0)$$

ϕ est la fonction critique d'un test randomisé de l'hypothèse nulle $H_0 : \varphi = \varphi_0$

- Tous les φ_0 pour lesquels $1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) = 1$ sont inclus dans l'intervalle (le *coeur*)
- Tous les φ_0 pour lesquels $1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) = 0$ sont exclus
- Pour les valeurs restantes $0 < 1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) < 1$ donne le “degré d'appartenance” de φ_0 à l'intervalle
Ajoutées au coeur ces valeurs constituent le *support*
- Calculs complexes. . .

Inférence *floue* (Geyer & Meeden, 2005)

- “Fuzzy confidence interval”
(propriétés d'exactitude et d'optimalité)
- Donné par la fonction

$$1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0)$$

ϕ est la fonction critique d'un test randomisé de l'hypothèse nulle $H_0 : \varphi = \varphi_0$

- Tous les φ_0 pour lesquels $1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) = 1$ sont inclus dans l'intervalle (le *coeur*)
- Tous les φ_0 pour lesquels $1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) = 0$ sont exclus
- Pour les valeurs restantes $0 < 1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) < 1$ donne le “*degré d'appartenance*” de φ_0 à l'intervalle
Ajoutées au coeur ces valeurs constituent le *support*
- Calculs complexes...

Inférence floue (Geyer & Meeden, 2005)

- “Fuzzy confidence interval”
(propriétés d'exactitude et d'optimalité)
- Donné par la fonction

$$1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0)$$

ϕ est la fonction critique d'un test randomisé de l'hypothèse nulle $H_0 : \varphi = \varphi_0$

- Tous les φ_0 pour lesquels $1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) = 1$ sont inclus dans l'intervalle (le *coeur*)
- Tous les φ_0 pour lesquels $1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) = 0$ sont exclus
- Pour les valeurs restantes $0 < 1 - \phi(x, \alpha, \varphi_0) < 1$ donne le “*degré d'appartenance*” de φ_0 à l'intervalle
Ajoutées au coeur ces valeurs constituent le *support*
- Calculs complexes...

Une solution simple (Agresti & Gottard, 2005)

- Dans la discussion de l'article de Geyer et Meeden, Agresti et Gottard ont proposé une solution simple pour construire un intervalle flou
- Le support est l'intervalle **exact** de Clopper-Pearson
- Le coeur est l'intervalle **anti-exact**
- Leur conclusion privilégie cette solution simple
"Our experience shows that the Agresti-Gottard fuzzy confidence interval typically has better performance than the Geyer-Meeden UMPU fuzzy interval, in terms of a more restricted core and support, except when x is at or very near the boundary"

Agresti & Gottard (2007)

Une solution simple (Agresti & Gottard, 2005)

- Dans la discussion de l'article de Geyer et Meeden, Agresti et Gottard ont proposé une solution simple pour construire un intervalle flou
- Le support est l'intervalle **exact** de Clopper-Pearson
- Le coeur est l'intervalle **anti-exact**
- Leur conclusion privilégie cette solution simple

"Our experience shows that the Agresti-Gottard fuzzy confidence interval typically has better performance than the Geyer-Meeden UMPU fuzzy interval, in terms of a more restricted core and support, except when x is at or very near the boundary"

Agresti & Gottard (2007)

Une solution simple (Agresti & Gottard, 2005)

- Dans la discussion de l'article de Geyer et Meeden, Agresti et Gottard ont proposé une solution simple pour construire un intervalle flou
- Le support est l'intervalle **exact** de Clopper-Pearson
- Le coeur est l'intervalle **anti-exact**
- Leur conclusion privilégie cette solution simple

"Our experience shows that the Agresti-Gottard fuzzy confidence interval typically has better performance than the Geyer-Meeden UMPU fuzzy interval, in terms of a more restricted core and support, except when x is at or very near the boundary"

Agresti & Gottard (2007)

Une solution simple (Agresti & Gottard, 2005)

- Dans la discussion de l'article de Geyer et Meeden, Agresti et Gottard ont proposé une solution simple pour construire un intervalle flou
- Le support est l'intervalle **exact** de Clopper-Pearson
- Le coeur est l'intervalle **anti-exact**
- Leur conclusion privilégie cette solution simple

"Our experience shows that the Agresti-Gottard fuzzy confidence interval typically has better performance than the Geyer-Meeden UMPU fuzzy interval, in terms of a more restricted core and support, except when x is at or very near the boundary"

Agresti & Gottard (2007)

Probabilités *imprécises*

- Propositions similaires utilisant la notion bayésienne de *zone d'ignorance*, qui se relie à la notion de *probabilité imprécise* (voir Walley, 1996)
 - cas binomial (Bernard, 1996)
 - situation plus complexe avec un modèle multinomial (Lecoutre & Charron, 2000)
- Deux distributions *a priori* et *a posteriori* représentant des probabilités inférieures et supérieures
- Exemple

Intervalle flou 95% pour $x = 3$ $n = 25$

Support $[.0255, .3122]$ (Clopper-Pearson exact)

Coeur $[.0454, .2603]$ (anti-exact)

Justification fréquentiste ou bayésienne

Probabilités *imprécises*

- Propositions similaires utilisant la notion bayésienne de *zone d'ignorance*, qui se relie à la notion de *probabilité imprécise* (voir Walley, 1996)
 - cas binomial (Bernard, 1996)
 - situation plus complexe avec un modèle multinomial (Lecoutre & Charron, 2000)
- Deux distributions *a priori* et *a posteriori* représentant des probabilités *inférieures* et *supérieures*
- Exemple

Intervalle flou 95% pour $x = 3$ $n = 25$

Support $[.0255, .3122]$ (Clopper-Pearson exact)

Coeur $[.0454, .2603]$ (anti-exact)

Justification fréquentiste ou bayésienne

Probabilités *imprécises*

- Propositions similaires utilisant la notion bayésienne de *zone d'ignorance*, qui se relie à la notion de *probabilité imprécise* (voir Walley, 1996)
 - cas binomial (Bernard, 1996)
 - situation plus complexe avec un modèle multinomial (Lecoutre & Charron, 2000)
- Deux distributions *a priori* et *a posteriori* représentant des probabilités *inférieures* et *supérieures*
- **Exemple**

Intervalle flou 95% pour $x = 3$ $n = 25$

Support $[.0255, .3122]$ (Clopper-Pearson exact)

Coeur $[.0454, .2603]$ (anti-exact)

Justification fréquentiste ou bayésienne

Compromis entre Clopper-Pearson exact et anti-exact

- Un compromis typique consiste à considérer un seuil P moyen

$$P_{\text{left}}^{\text{mid}}(\varphi_0, x) = \frac{1}{2} [P_{\text{left}}^{\text{inc}}(\varphi_0, x) + P_{\text{left}}^{\text{exc}}(\varphi_0, x)] \quad \text{"mid-}P\text{-value"}$$

Lancaster (1949, 1961), Wells (1998), Routledge (1994)
Berry and Armitage (1995), Brown, Cai and DasGupta (2001)
Hirji (2005, pp. 218-219), Agresti & Gottard (2007)

- L'intervalle bayésien associé à l'*a priori* de Jeffreys bêta($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$)

$$\text{d'où } \varphi | x \sim \text{bêta}(x + \frac{1}{2}, n - x + \frac{1}{2})$$

est un autre compromis

- Il est souvent affirmé que les deux intervalles sont très voisins
Mais on peut trouver des différences appréciables pour n petit

Exemple $x = 1$ $n = 10$, $\alpha = .05$

mid- P [.0050, .4035]

Jeffreys [.0110, .3813]

Compromis entre Clopper-Pearson exact et anti-exact

- Un compromis typique consiste à considérer un seuil P moyen

$$P_{\text{left}}^{\text{mid}}(\varphi_0, x) = \frac{1}{2} [P_{\text{left}}^{\text{inc}}(\varphi_0, x) + P_{\text{left}}^{\text{exc}}(\varphi_0, x)] \quad \text{"mid-}P\text{-value"}$$

Lancaster (1949, 1961), Wells (1998), Routledge (1994)
Berry and Armitage (1995), Brown, Cai and DasGupta (2001)
Hirji (2005, pp. 218-219), Agresti & Gottard (2007)

- L'intervalle bayésien associé à l'*a priori* de Jeffreys $\text{bêta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\text{d'où } \varphi | x \sim \text{bêta}(x + \frac{1}{2}, n - x + \frac{1}{2})$$

est un autre compromis

- Il est souvent affirmé que les deux intervalles sont très voisins
Mais on peut trouver des différences appréciables pour n petit

Exemple $x = 1$ $n = 10$, $\alpha = .05$

mid- P [.0050, .4035]

Jeffreys [.0110, .3813]

Compromis entre Clopper-Pearson exact et anti-exact

- Un compromis typique consiste à considérer un seuil P moyen

$$P_{\text{left}}^{\text{mid}}(\varphi_0, x) = \frac{1}{2} [P_{\text{left}}^{\text{inc}}(\varphi_0, x) + P_{\text{left}}^{\text{exc}}(\varphi_0, x)] \quad \text{"mid-}P\text{-value"}$$

Lancaster (1949, 1961), Wells (1998), Routledge (1994)
Berry and Armitage (1995), Brown, Cai and DasGupta (2001)
Hirji (2005, pp. 218-219), Agresti & Gottard (2007)

- L'intervalle bayésien associé à l'*a priori* de Jeffreys $\text{bêta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\text{d'où } \varphi | x \sim \text{bêta}(x + \frac{1}{2}, n - x + \frac{1}{2})$$

est un autre compromis

- Il est souvent affirmé que les deux intervalles sont très voisins
Mais on peut trouver des différences appréciables pour n petit

Exemple $x = 1$ $n = 10$, $\alpha = .05$

mid- P [.0050, .4035]

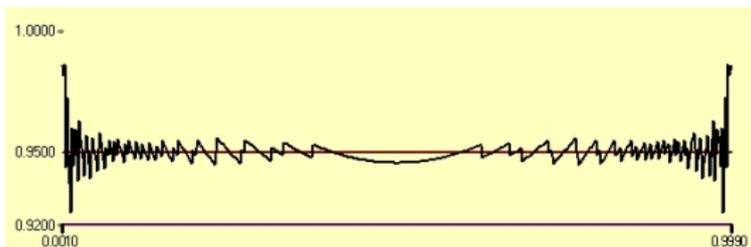
Jeffreys [.0110, .3813]

Très bonnes propriétés de couverture – $n=500$, IC 95%

Mid- P



Jeffreys



Intervalles w - P : $0 \leq w \leq 1$ fixé

w - P -value

$$P_{\text{left}}^w(\varphi_0, x) = (1 - w)P_{\text{left}}^{\text{inc}}(\varphi_0, x) + wP_{\text{left}}^{\text{exc}}(\varphi_0, x)$$

(comme l'intervalle randomisé, mais avec w fixé)

- Agresti et Gottard (2007): w déterminé par la règle suivante: l'intervalle a un taux de couverture moyen égal à $1 - \alpha$, le taux étant moyenné selon une distribution G sur les valeurs possibles de φ
- Pour des distribution G vagues – uniforme ou bêta($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) – on trouve des valeurs w incluses entre .25 et .35 pour n petit et autour de .50 quand n augmente
- Confirmation du fait que l'intervalle mid- P tend, en moyenne à être légèrement conservateur

Intervalles w - P : $0 \leq w \leq 1$ fixé

w - P -value

$$P_{\text{left}}^w(\varphi_0, x) = (1 - w)P_{\text{left}}^{\text{inc}}(\varphi_0, x) + wP_{\text{left}}^{\text{exc}}(\varphi_0, x)$$

(comme l'intervalle randomisé, mais avec w fixé)

- Agresti et Gottard (2007): w déterminé par la règle suivante: l'intervalle a un taux de couverture moyen égal à $1 - \alpha$, le taux étant moyenné selon une distribution G sur les valeurs possibles de φ
- Pour des distribution G vagues – uniforme ou bêta($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) – on trouve des valeurs w incluses entre .25 et .35 pour n petit et autour de .50 quand n augmente
- Confirmation du fait que l'intervalle mid- P tend, en moyenne à être légèrement conservateur

Intervalles w - P : $0 \leq w \leq 1$ fixé

w - P -value

$$P_{\text{left}}^w(\varphi_0, x) = (1 - w)P_{\text{left}}^{\text{inc}}(\varphi_0, x) + wP_{\text{left}}^{\text{exc}}(\varphi_0, x)$$

(comme l'intervalle randomisé, mais avec w fixé)

- Agresti et Gottard (2007): w déterminé par la règle suivante: l'intervalle a un taux de couverture moyen égal à $1 - \alpha$, le taux étant moyenné selon une distribution G sur les valeurs possibles de φ
- Pour des distribution G vagues – uniforme ou bêta($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) – on trouve des valeurs w incluses entre .25 et .35 pour n petit et autour de .50 quand n augmente
- Confirmation du fait que l'intervalle mid- P tend, en moyenne à être légèrement conservateur

Intervalles w - P : $0 \leq w \leq 1$ fixé

w - P -value

$$P_{\text{left}}^w(\varphi_0, x) = (1 - w)P_{\text{left}}^{\text{inc}}(\varphi_0, x) + wP_{\text{left}}^{\text{exc}}(\varphi_0, x)$$

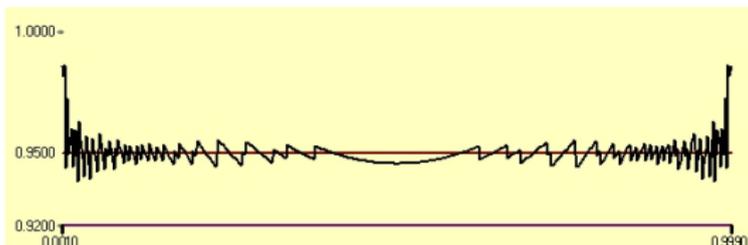
(comme l'intervalle randomisé, mais avec w fixé)

- Agresti et Gottard (2007): w déterminé par la règle suivante: l'intervalle a un taux de couverture moyen égal à $1 - \alpha$, le taux étant moyenné selon une distribution G sur les valeurs possibles de φ
- Pour des distribution G vagues – uniforme ou bêta($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) – on trouve des valeurs w incluses entre .25 et .35 pour n petit et autour de .50 quand n augmente
- Confirmation du fait que l'intervalle mid- P tend, en moyenne à être légèrement conservateur

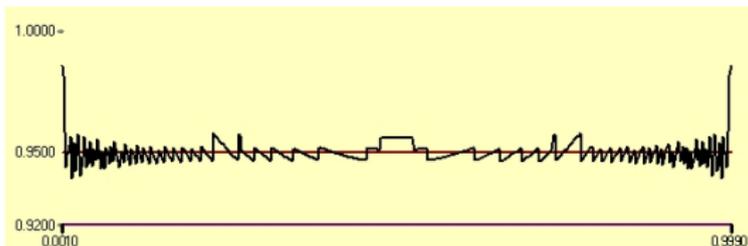
Vollset (1993), Agresti & Coull (1998), Newcombe (1998)

Améliore les taux de couverture – $n=500$, IC 95%

Clopper-Pearson $w = .43$



Blaker $w = .33$

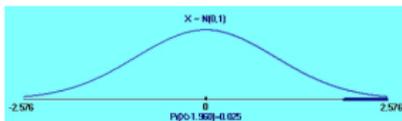


Partie I - Inférence sur une proportion

- 1 Les intervalles bilatéraux exacts
 - L'intervalle de Clopper-Pearson (1934)
 - Clopper-Pearson et intervalles exacts "optimaux"
 - L'intervalle de Blaker (2000) / Cox & Hinkley (1974)
 - Des intervalles approximatés quasi exacts
- 2 Des intervalles 'exacts' approchés
 - Anti-exacts
 - Inférence *floue* - Probabilités *imprécises*
 - Approchés: *mid-P*, bayésien (Jeffreys)
 - Approchés: *w-P*
- 3 Intervalles approximatés et approchés
 - Intervalle de Wald (approximation normale) et modifications
 - Raffinements
 - Des nombreuse autres méthodes
- 4 Comparaison des méthodes
 - Événements rares
 - Taux de couverture bilatéral
 - Taux d'erreur unilatéraux
 - ... et l'intervalle de Blaker?

Intervalle de Wald et modifications plus ou moins *ad hoc*

- Simple approximation normale (Laplace, 1812)



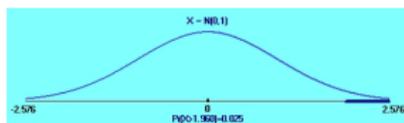
$$z_{\alpha/2} : P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{1}{2}\alpha$$

$$U_{\alpha}^W = \frac{x}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} \quad \text{"Wald interval"}$$

- $U_{\alpha}^{Wc} = \frac{x}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} + \frac{1}{2n}$ "corrigé"
- $U_{\alpha}^{Wr} = \frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}}$ "recentré"
- $U_{\alpha}^{WAC} = \frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2}(1-\frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2})}{n}}$ Agresti & Coull
- approximation par une distribution *t* de Student
- Etc.

Intervalle de Wald et modifications plus ou moins *ad hoc*

- Simple approximation normale (Laplace, 1812)



$$z_{\alpha/2} : P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{1}{2}\alpha$$

$$U_{\alpha}^W = \frac{\hat{x}}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{\hat{x}}{n}(1-\frac{\hat{x}}{n})}{n}}$$
 "Wald interval"

- $U_{\alpha}^{Wc} = \frac{\hat{x}}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{\hat{x}}{n}(1-\frac{\hat{x}}{n})}{n}} + \frac{1}{2n}$ "corrigé"

- $U_{\alpha}^{Wr} = \frac{\hat{x} + z_{\alpha/2}^2/2}{n + z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{\hat{x}}{n}(1-\frac{\hat{x}}{n})}{n}}$ "recentré"

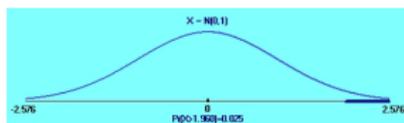
- $U_{\alpha}^{WAC} = \frac{\hat{x} + z_{\alpha/2}^2/2}{n + z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{\hat{x} + z_{\alpha/2}^2/2}{n + z_{\alpha/2}^2} (1 - \frac{\hat{x} + z_{\alpha/2}^2/2}{n + z_{\alpha/2}^2})}{n}}$ Agresti & Coull

- approximation par une distribution *t* de Student

- Etc.

Intervalle de Wald et modifications plus ou moins *ad hoc*

- Simple approximation normale (Laplace, 1812)



$$z_{\alpha/2} : P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{1}{2}\alpha$$

$$U_{\alpha}^W = \frac{x}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} \quad \text{"Wald interval"}$$

- $U_{\alpha}^{Wc} = \frac{x}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} + \frac{1}{2n}$ "corrigé"

- $U_{\alpha}^{Wr} = \frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}}$ "recentré"

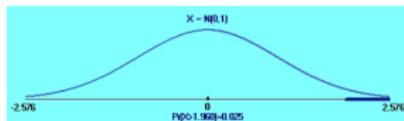
- $U_{\alpha}^{WAC} = \frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2} (1-\frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2})}{n}}$ Agresti & Coull

- approximation par une distribution *t* de Student

- Etc.

Intervalle de Wald et modifications plus ou moins *ad hoc*

- Simple approximation normale (Laplace, 1812)



$$z_{\alpha/2} : P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{1}{2}\alpha$$

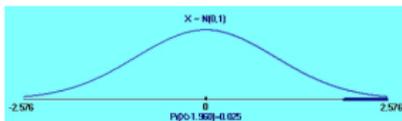
$$U_{\alpha}^W = \frac{x}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} \quad \text{"Wald interval"}$$

- $U_{\alpha}^{Wc} = \frac{x}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} + \frac{1}{2n}$ "corrigé"
- $U_{\alpha}^{Wr} = \frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}}$ "recentré"
- $U_{\alpha}^{WAC} = \frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2} (1-\frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2})}{n}}$ Agresti & Coull

- approximation par une distribution *t* de Student
- Etc.

Intervalle de Wald et modifications plus ou moins *ad hoc*

- Simple approximation normale (Laplace, 1812)



$$z_{\alpha/2} : P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{1}{2}\alpha$$

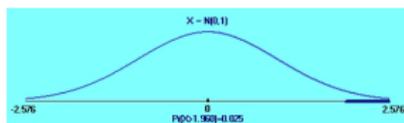
$$U_{\alpha}^W = \frac{x}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} \quad \text{"Wald interval"}$$

- $U_{\alpha}^{Wc} = \frac{x}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} + \frac{1}{2n}$ "corrigé"
- $U_{\alpha}^{Wr} = \frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}}$ "recentré"
- $U_{\alpha}^{WAC} = \frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2} (1-\frac{x+z_{\alpha/2}^2/2}{n+z_{\alpha/2}^2})}{n}}$ Agresti & Coull
- approximation par une distribution *t* de Student

- Etc.

Intervalle de Wald et modifications plus ou moins *ad hoc*

- Simple approximation normale (Laplace, 1812)



$$z_{\alpha/2} : P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{1}{2}\alpha$$

$$U_{\alpha}^W = \frac{\bar{x}}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{\bar{x}}{n}(1-\frac{\bar{x}}{n})}{n}}$$
 "Wald interval"

- $U_{\alpha}^{Wc} = \frac{\bar{x}}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{\bar{x}}{n}(1-\frac{\bar{x}}{n})}{n}} + \frac{1}{2n}$ "corrigé"

- $U_{\alpha}^{Wr} = \frac{\bar{x} + z_{\alpha/2}^2/2}{n + z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{\bar{x}}{n}(1-\frac{\bar{x}}{n})}{n}}$ "recentré"

- $U_{\alpha}^{WAC} = \frac{\bar{x} + z_{\alpha/2}^2/2}{n + z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{\bar{x} + z_{\alpha/2}^2/2}{n + z_{\alpha/2}^2} (1 - \frac{\bar{x} + z_{\alpha/2}^2/2}{n + z_{\alpha/2}^2})}{n}}$ Agresti & Coull

- approximation par une distribution *t* de Student
- Etc.

Score et second ordre corrigé

- Méthode de **score** de Wilson (1927)

$$U_{\alpha}^S = \frac{\frac{x}{n} + \frac{1}{2n} z_{\alpha/2}^2}{1 + \frac{1}{n} z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n}) + \frac{1}{4n^2} z_{\alpha/2}^2}}{1 + \frac{1}{n} z_{\alpha/2}^2}$$

Différentes corrections, modifications

En particulier une modification proposée par Brown, Cai et DasGupta (2002) pour les valeurs extrêmes de x

- Méthode du **second ordre corrigé** (Brown, Cai & DasGupta, 2002)
(basée sur un développement d'Edgeworth d'ordre 2)

$$U_{\alpha}^{\text{SOC}} = \frac{\frac{x}{n} + \frac{2z_{\alpha/2}^2 + 1}{6n}}{1 + \frac{2}{n} z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n}) + \frac{2z_{\alpha/2}^2 + 7}{36} - \frac{13z_{\alpha/2}^2 + 17}{18} \frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}$$

Score et second ordre corrigé

- Méthode de **score** de Wilson (1927)

$$U_{\alpha}^S = \frac{\frac{x}{n} + \frac{1}{2n} z_{\alpha/2}^2}{1 + \frac{1}{n} z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n}) + \frac{1}{4n^2} z_{\alpha/2}^2}}{1 + \frac{1}{n} z_{\alpha/2}^2}$$

Différentes corrections, modifications

En particulier une modification proposée par Brown, Cai et DasGupta (2002) pour les valeurs extrêmes de x

- Méthode du **second ordre corrigé** (Brown, Cai & DasGupta, 2002)
(basée sur un développement d'Edgeworth d'ordre 2)

$$U_{\alpha}^{\text{SOC}} = \frac{\frac{x}{n} + \frac{2z_{\alpha/2}^2 + 1}{6n}}{1 + \frac{2}{n} z_{\alpha/2}^2} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n} + \frac{2z_{\alpha/2}^2 + 7}{36} - \frac{13z_{\alpha/2}^2 + 17}{18} \frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}$$

Autres méthodes

- Transformations

Limite supérieure pour $\text{Arcsin}\sqrt{\varphi}$

$$U_{\alpha}^{\text{AS}} = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{n}} + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$U_{\alpha}^{\text{ASm}} = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{x+\frac{3}{4}}{n+\frac{3}{2}}} + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \quad (\text{"modifié": Anscombe, 1948})$$

Limite supérieure pour $\text{Log}\left(\frac{\varphi}{1-\varphi}\right)$

$$U_{\alpha}^{\text{L}} = \text{Log}\left(\frac{x}{n-x}\right) + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{n}{x(n-x)}}} \quad (\text{"logit"})$$

$$U_{\alpha}^{\text{Lm}} = \text{Log}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{n-x+\frac{1}{2}}\right) + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{n(x+1)(n-x+1)}}} \quad (\text{"modifié": Anscombe})$$

- Intervalle du maximum de vraisemblance

Peut donner deux intervalles séparés

- Autres approches:

bayésien avec autre choix d'*a priori*, fiduciaire "revisitée", bootstrap...

Autres méthodes

- **Transformations**

Limite supérieure pour **Arcsin** $\sqrt{\varphi}$

$$U_{\alpha}^{AS} = \text{Arcsin} \sqrt{\frac{x}{n}} + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$U_{\alpha}^{ASm} = \text{Arcsin} \sqrt{\frac{x + \frac{3}{4}}{n + \frac{3}{4}}} + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \quad (\text{"modifié": Anscombe, 1948})$$

Limite supérieure pour **Log** $\left(\frac{\varphi}{1-\varphi}\right)$

$$U_{\alpha}^L = \text{Log} \left(\frac{x}{n-x} \right) + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{n}{x(n-x)}}} \quad (\text{"logit"})$$

$$U_{\alpha}^{Lm} = \text{Log} \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{n - x + \frac{1}{2}} \right) + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{n(x+1)(n-x+1)}}} \quad (\text{"modifié": Anscombe})$$

- Intervalle du **maximum de vraisemblance**

Peut donner deux intervalles séparés

- Autres approches:

bayésien avec autre choix d'*a priori*, fiduciaire "revisitée", bootstrap...

Autres méthodes

- **Transformations**

Limite supérieure pour **Arcsin** $\sqrt{\varphi}$

$$U_{\alpha}^{AS} = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{n}} + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$U_{\alpha}^{ASm} = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{x + \frac{3}{4}}{n + \frac{3}{4}}} + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \quad (\text{"modifié": Anscombe, 1948})$$

Limite supérieure pour **Log** $\left(\frac{\varphi}{1-\varphi}\right)$

$$U_{\alpha}^L = \text{Log}\left(\frac{x}{n-x}\right) + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{n}{x(n-x)}}} \quad (\text{"logit"})$$

$$U_{\alpha}^{Lm} = \text{Log}\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{n - x + \frac{1}{2}}\right) + z_{\alpha/2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{n(x+1)(n-x+1)}}} \quad (\text{"modifié": Anscombe})$$

- Intervalle du **maximum de vraisemblance**

Peut donner deux intervalles séparés

- Autres approches:

bayésien avec autre choix d'*a priori*, fiduciaire "revisitée", bootstrap...

Pour une revue récente: Cousins, Hymes & Tucker (2010) 

Partie I - Inférence sur une proportion

- 1 Les intervalles bilatéraux exacts
 - L'intervalle de Clopper-Pearson (1934)
 - Clopper-Pearson et intervalles exacts "optimaux"
 - L'intervalle de Blaker (2000) / Cox & Hinkley (1974)
 - Des intervalles approximés quasi exacts
- 2 Des intervalles 'exacts' approchés
 - Anti-exacts
 - Inférence *floue* - Probabilités *imprécises*
 - Approchés: mid- P , bayésien (Jeffreys)
 - Approchés: w - P
- 3 Intervalles approximés et approchés
 - Intervalle de Wald (approximation normale) et modifications
 - Raffinements
 - Des nombreuse autres méthodes
- 4 Comparaison des méthodes
 - Événements rares
 - Taux de couverture bilatéral
 - Taux d'erreur unilatéraux
 - ... et l'intervalle de Blaker?

une situation typique

- Discussion récente animée par le groupe Biopharmacie et Santé de la SFdS
Problème posé par l'Établissement Français du Sang
- Taux d'événements $.000045$ ("valeur de référence")
- Eradication de ces événements avec une nouvelle méthode

Un échantillon d'effectif $n = 100\,000$

$$0 \leq \varphi \leq .00005$$

$$\text{en fait } .00001 \leq \varphi \leq .00005$$

Au moins pour $\varphi < .00001$ un n plus grand serait nécessaire

une situation typique

- Discussion récente animée par le groupe Biopharmacie et Santé de la SFdS
Problème posé par l'Établissement Français du Sang
- Taux d'événements **.000045** ("valeur de référence")
- Eradication de ces événements avec une nouvelle méthode

Un échantillon d'effectif $n = 100\,000$

$$0 \leq \varphi \leq .00005$$

$$\text{en fait } .00001 \leq \varphi \leq .00005$$

Au moins pour $\varphi < .00001$ un n plus grand serait nécessaire

une situation typique

- Discussion récente animée par le groupe Biopharmacie et Santé de la SFdS
Problème posé par l'Établissement Français du Sang
- Taux d'événements **.000045** ("valeur de référence")
- Eradication de ces événements avec une nouvelle méthode

Un échantillon d'effectif $n = 100\,000$

$$0 \leq \varphi \leq .00005$$

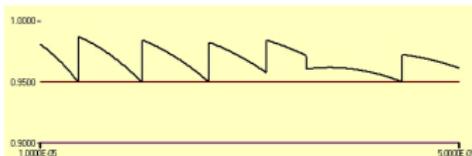
$$\text{en fait } .00001 \leq \varphi \leq .00005$$

Au moins pour $\varphi < .00001$ un n plus grand serait nécessaire

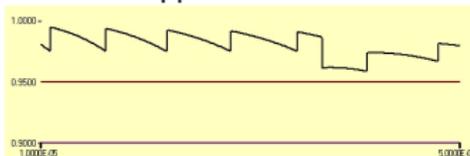
Taux de couverture bilatéral – Méthodes exactes

La supériorité de l'intervalle de Blaker est incontestable

Blaker



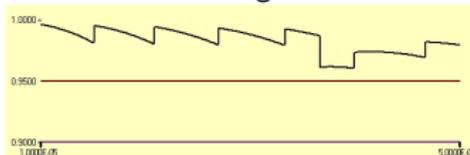
Clopper-Pearson



Arc sinus corrigé



Arc sinus corrigé modifié



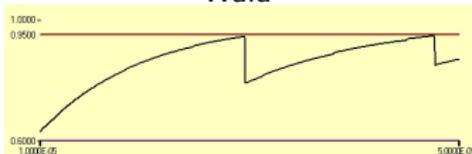
Score corrigé



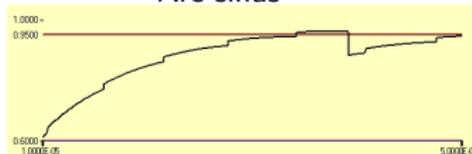
Taux de couverture bilatéral – Méthodes approchées

Les méthodes simples ne sont pas satisfaisantes, certaines autres non plus

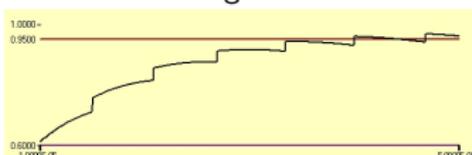
Wald



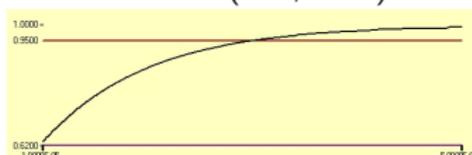
Arc sinus



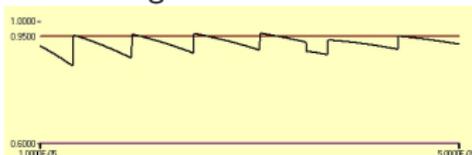
Logit



Student (Pan, 2002)



Logit modifié



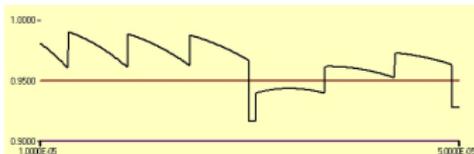
Agresti & Coull



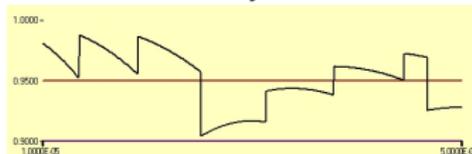
Taux de couverture bilatéral – Méthodes approchées

De très bons intervalles

mid- P



Jeffreys



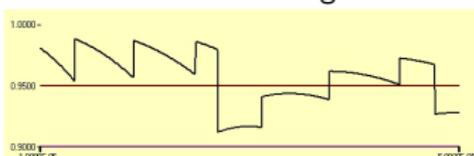
Score



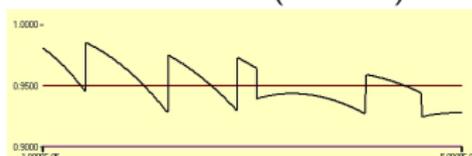
Score modifié



Second ordre corrigé



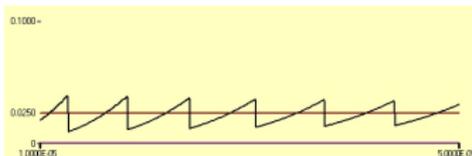
w - P Blaker ($w = .47$)



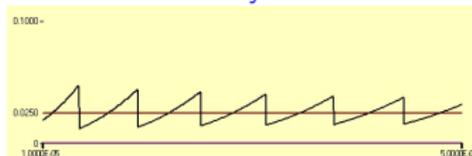
Taux d'erreur unilatéral – Limite inférieure

Les meilleurs intervalles: mid- P , Jeffreys, second ordre corrigé

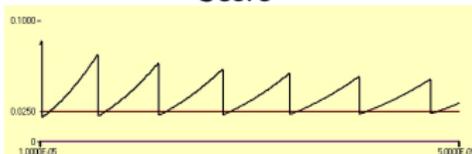
mid- P



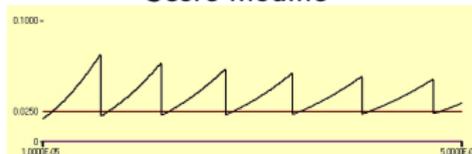
Jeffreys



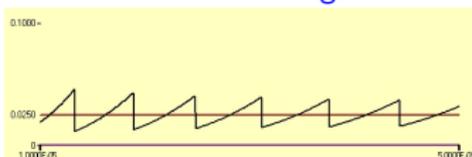
Score



Score modifié



Second ordre corrigé

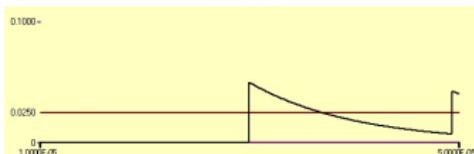


w- P Blaker ($w = .47$)

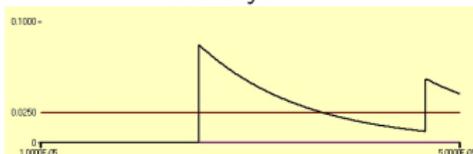


Taux d'erreur unilatéral – Limite supérieure

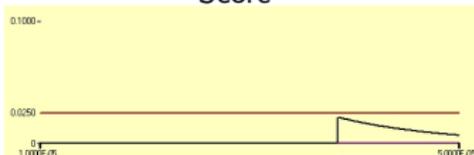
mid- P



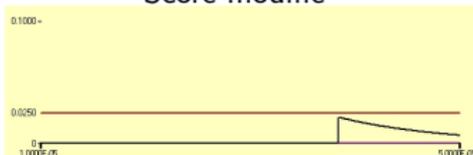
Jeffreys



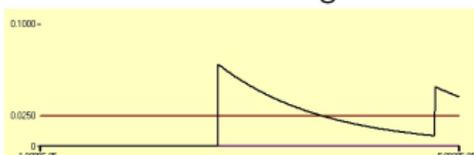
Score



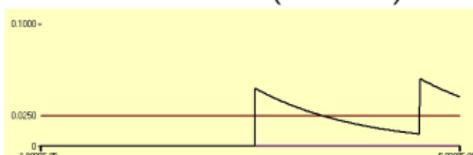
Score modifié



Second ordre corrigé



w - P Blaker ($w = .47$)



Confirmation de l'étude de Cai (2005) pour les petits échantillons

Une des rares études à prendre en compte les taux d'erreur unilatéraux

“The one-sided Jeffreys and second-order corrected intervals
can be resolutely recommended”

Cai (2005)

Cette conclusion peut être étendue à l'intervalle $\text{mid-}P$, voisin de celui de Jeffreys, non considéré par Cai

Si on privilégie un intervalle bilatéral exact

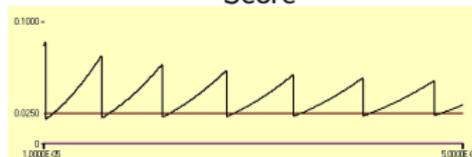
Des taux d'erreurs pour les limites inférieure et supérieure relativement bons

Limite inférieure

Blaker

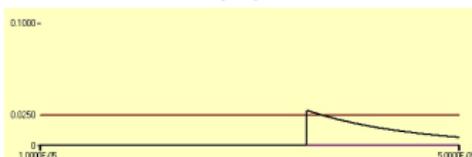


Score

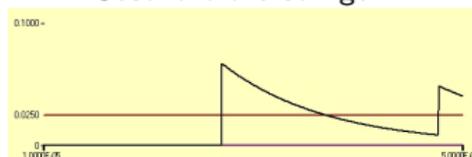


Limite supérieure

Blaker



Second ordre corrigé



Fin de la partie I

Intervalles de confiance pour le rapport de deux proportions Applications aux événements rares

Bruno Lecoutre

ERIS, Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem
smallskip UMR 6085, CNRS et Université de Rouen

Strasbourg - 11 Janvier 2011

[et Gérard Derzko (LSTA, Université Paris VI)]



Partie II - Inférence sur le rapport de deux proportions

- 1 Motivation / Objectifs
- 2 Modèles et procédures
 - Modèle de Poisson pour 2 groupes indépendants
 - Approche fréquentiste conditionnelle
 - Procédures fréquentistes non conditionnelles
 - Procédures bayésiennes
- 3 Exemples d'applications et comparaison des procédures
 - Applications numériques
 - Comparaison / Programme "LesCouvertures"
- 4 Conclusions
 - Discussion

Motivation: les effets indésirables rares

- effets indésirables rares mais sévères enregistrés dans des études cliniques comparatives de phase 3
- Estimer l'incertitude sur le rapport des taux de tels effets obtenus avec le traitement actif et un placebo
- Attention particulière: la limite supérieure pour ce rapport
- Même problème avec stratification (exemple: méta-analyses)
- Corollaire: nombre de sujets (puissance) pour garantir un rapport de taux non-supérieur à une valeur imposée
- Nombreux autres contextes pour ce problème

Motivation: les effets indésirables rares

- effets indésirables rares mais sévères enregistrés dans des études cliniques comparatives de phase 3
- Estimer l'incertitude sur le rapport des taux de tels effets obtenus avec le traitement actif et un placebo
- Attention particulière: la limite supérieure pour ce rapport
- Même problème avec stratification (exemple: méta-analyses)
- Corollaire: nombre de sujets (puissance) pour garantir un rapport de taux non-supérieur à une valeur imposée
- Nombreux autres contextes pour ce problème

Motivation: les effets indésirables rares

- effets indésirables rares mais sévères enregistrés dans des études cliniques comparatives de phase 3
- Estimer l'incertitude sur le rapport des taux de tels effets obtenus avec le traitement actif et un placebo
- Attention particulière: la limite supérieure pour ce rapport
- Même problème avec stratification (exemple: méta-analyses)
- Corollaire: nombre de sujets (puissance) pour garantir un rapport de taux non-supérieur à une valeur imposée
- Nombreux autres contextes pour ce problème

Motivation: les effets indésirables rares

- effets indésirables rares mais sévères enregistrés dans des études cliniques comparatives de phase 3
- Estimer l'incertitude sur le rapport des taux de tels effets obtenus avec le traitement actif et un placebo
- Attention particulière: la limite supérieure pour ce rapport
- Même problème avec stratification (exemple: méta-analyses)
- Corollaire: nombre de sujets (puissance) pour garantir un rapport de taux non-supérieur à une valeur imposée
- Nombreux autres contextes pour ce problème

Motivation: les effets indésirables rares

- effets indésirables rares mais sévères enregistrés dans des études cliniques comparatives de phase 3
- Estimer l'incertitude sur le rapport des taux de tels effets obtenus avec le traitement actif et un placebo
- Attention particulière: la limite supérieure pour ce rapport
- Même problème avec stratification (exemple: méta-analyses)
- Corollaire: nombre de sujets (puissance) pour garantir un rapport de taux non-supérieur à une valeur imposée
- Nombreux autres contextes pour ce problème

Motivation: les effets indésirables rares

- effets indésirables rares mais sévères enregistrés dans des études cliniques comparatives de phase 3
- Estimer l'incertitude sur le rapport des taux de tels effets obtenus avec le traitement actif et un placebo
- Attention particulière: la limite supérieure pour ce rapport
- Même problème avec stratification (exemple: méta-analyses)
- Corollaire: nombre de sujets (puissance) pour garantir un rapport de taux non-supérieur à une valeur imposée
- Nombreux autres contextes pour ce problème

Partie II - Inférence sur le rapport de deux proportions

- 1 Motivation / Objectifs
- 2 Modèles et procédures
 - Modèle de Poisson pour 2 groupes indépendants
 - Approche fréquentiste conditionnelle
 - Procédures fréquentistes non conditionnelles
 - Procédures bayésiennes
- 3 Exemples d'applications et comparaison des procédures
 - Applications numériques
 - Comparaison / Programme "LesCouvertures"
- 4 Conclusions
 - Discussion

Caractérisation

- Deux variables aléatoires X_t ($t = 1, 2$) avec des distributions d'échantillonnage indépendantes de paramètres λ_t

$$X_t | \lambda_t \sim \text{Poi}(n_t \lambda_t) \quad t = 1, 2$$

$$\Pr(X_t = x_t | \lambda_t) = \frac{(n_t \lambda_t)^{x_t}}{x_t!} e^{-n_t \lambda_t}$$

- On s'intéresse au rapport

$$\tau = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Caractérisation

- Deux variables aléatoires X_t ($t = 1, 2$) avec des distributions d'échantillonnage indépendantes de paramètres λ_t

$$X_t | \lambda_t \sim \text{Poi}(n_t \lambda_t) \quad t = 1, 2$$

$$\Pr(X_t = x_t | \lambda_t) = \frac{(n_t \lambda_t)^{x_t}}{x_t!} e^{-n_t \lambda_t}$$

- On s'intéresse au rapport

$$\tau = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Principe de l'approche fréquentiste conditionnelle

- La plus fréquemment utilisée

- $X = X_1 + X_2$

La distribution d'échantillonnage de X_1 conditionnellement à la valeur observée $x = x_1 + x_2$ est une distribution **binomiale** qui ne dépend de λ_1 et λ_2 que par l'intermédiaire de

$$\varphi = \frac{n_1 \lambda_1}{n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2} = \frac{\tau}{\frac{n_2}{n_1} + \tau}$$

$$X_1 | X = x, \lambda_1, \lambda_2 \sim X_1 | X = x, \varphi \sim \text{Bin}(x, \varphi)$$

- \Leftrightarrow Toutes les procédures de construction d'un intervalle de confiance $100(1 - \alpha)\%$ pour une proportion binomiale φ s'appliquent, d'où un **intervalle (conditionnel à x) pour τ**

Principe de l'approche fréquentiste conditionnelle

- La plus fréquemment utilisée
- $X = X_1 + X_2$

La distribution d'échantillonnage de X_1 conditionnellement à la valeur observée $x = x_1 + x_2$ est une distribution **binomiale** qui ne dépend de λ_1 et λ_2 que par l'intermédiaire de

$$\varphi = \frac{n_1 \lambda_1}{n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2} = \frac{\tau}{\frac{n_2}{n_1} + \tau}$$

$$X_1 | X = x, \lambda_1, \lambda_2 \sim X_1 | X = x, \varphi \sim \text{Bin}(x, \varphi)$$

- \leftrightarrow Toutes les procédures de construction d'un intervalle de confiance $100(1 - \alpha)\%$ pour une proportion binomiale φ s'appliquent, d'où un **intervalle (conditionnel à x) pour τ**

Principe de l'approche fréquentiste conditionnelle

- La plus fréquemment utilisée
- $X = X_1 + X_2$

La distribution d'échantillonnage de X_1 conditionnellement à la valeur observée $x = x_1 + x_2$ est une distribution **binomiale** qui ne dépend de λ_1 et λ_2 que par l'intermédiaire de

$$\varphi = \frac{n_1 \lambda_1}{n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2} = \frac{\tau}{\frac{n_2}{n_1} + \tau}$$

$$X_1 | X = x, \lambda_1, \lambda_2 \sim X_1 | X = x, \varphi \sim \text{Bin}(x, \varphi)$$

- \hookrightarrow Toutes les procédures de construction d'un intervalle de confiance $100(1 - \alpha)\%$ pour une proportion binomiale φ s'appliquent, d'où un **intervalle (conditionnel à x) pour τ**

Taux de couverture des procédures conditionnelles

- La distribution utilisée pour construire un intervalle de confiance conditionnel pour τ ne dépend que de ce paramètre
Mais la probabilité d'échantillonnage qui donne **les taux de couverture** dépend à la fois de λ_1 et de λ_2 , donc **à la fois de τ et d'un paramètre *parasite***
- La conséquence est que les procédures conditionnelles peuvent éventuellement être beaucoup moins satisfaisantes que pour une proportion binomiale, en particulier dans le cas d'événements rares

Taux de couverture des procédures conditionnelles

- La distribution utilisée pour construire un intervalle de confiance conditionnel pour τ ne dépend que de ce paramètre
Mais la probabilité d'échantillonnage qui donne **les taux de couverture** dépend à la fois de λ_1 et de λ_2 , donc **à la fois de τ et d'un paramètre *parasite***
- La conséquence est que les procédures conditionnelles peuvent éventuellement être beaucoup moins satisfaisantes que pour une proportion binomiale, en particulier dans le cas d'événements rares

Sahai & Kurshid – “Log-linéaire”

Sahai & Kurshid

$$\frac{n_2}{n_1} \left(\frac{\sqrt{(x_1 + \frac{1}{2})(x_2 + \frac{1}{2})} \pm \frac{1}{2} z_{\alpha/2} \sqrt{x + 1 - \frac{1}{4} z_{\alpha/2}^2}}{x_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z_{\alpha/2}^2} \right)^2$$

Log-linéaire

$$\frac{x_1 + \frac{1}{2}}{x_2 + \frac{1}{2}} \exp \left(\pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{x_1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{2}}} \right)$$

Modèle bayésien conjugué

- Distributions *a priori* gamma indépendantes

$$\lambda_t \sim \frac{1}{n_t^0} \text{gamma}(x_t^0)$$

Distributions *a posteriori* gamma indépendantes

$$\lambda_t \mid \text{données} \sim \frac{1}{n_t + n_t^0} \text{gamma}(x_t + x_t^0)$$

Distributions marginales de φ et τ pour $n_1^0 = n_2^0 = 0$

$$\varphi \mid \text{données} \sim \text{bêta}(x_1 + x_1^0, x_2 + x_2^0)$$

$$\tau \mid \text{données} \sim \frac{n_2}{n_1} \text{bêta}_{//}(x_1 + x_1^0, x_2 + x_2^0)$$

Modèle bayésien conjugué

- Distributions *a priori* gamma indépendantes

$$\lambda_t \sim \frac{1}{n_t^0} \text{gamma}(x_t^0)$$

Distributions *a posteriori* gamma indépendantes

$$\lambda_t \mid \text{données} \sim \frac{1}{n_t + n_t^0} \text{gamma}(x_t + x_t^0)$$

Distributions marginales de φ et τ pour $n_1^0 = n_2^0 = 0$

$$\varphi \mid \text{données} \sim \text{bêta}(x_1 + x_1^0, x_2 + x_2^0)$$

$$\tau \mid \text{données} \sim \frac{n_2}{n_1} \text{bêta}_{II}(x_1 + x_1^0, x_2 + x_2^0)$$

Stratification: procédures bayésiennes

- On s'intéresse au paramètre $\tau = \frac{\sum_j n_{1,j} \lambda_{1,j} / n_1}{\sum_j n_{2,j} \lambda_{2,j} / n_2}$
- On applique le résultat précédent à chaque strate

Pour chaque strate (avec indépendance)

$$\lambda_{t,j} | \text{données} \sim \frac{1}{n_{t,j}} \text{gamma}(x_{t,j} + x_{t,j}^0)$$

- d'où les distributions marginales

$$n_t = \sum_j n_{t,j} \quad x_t = \sum_j x_{t,j} \quad x_t^0 = \sum_j x_{t,j}^0 \quad \lambda_t = \sum_j n_{t,j} \lambda_{t,j} / n_t$$

$$\lambda_t | \text{données} \sim \frac{1}{n_t} \text{gamma}(x_t + x_t^0)$$

$$\tau | \text{données} \sim \frac{n_2}{n_1} \text{bêta}_{II}(x_1 + x_1^0, x_2 + x_2^0)$$

Stratification: procédures bayésiennes

- On s'intéresse au paramètre $\tau = \frac{\sum_j n_{1,j} \lambda_{1,j} / n_1}{\sum_j n_{2,j} \lambda_{2,j} / n_2}$
- On applique le résultat précédent à chaque strate

Pour chaque strate (avec indépendance)

$$\lambda_{t,j} | \text{données} \sim \frac{1}{n_{t,j}} \text{gamma}(x_{t,j} + x_{t,j}^0)$$

- d'où les distributions marginales

$$n_t = \sum_j n_{t,j} \quad x_t = \sum_j x_{t,j} \quad x_t^0 = \sum_j x_{t,j}^0 \quad \lambda_t = \sum_j n_{t,j} \lambda_{t,j} / n_t$$

Pour toutes strates

$$\lambda_t | \text{données} \sim \frac{1}{n_t} \text{gamma}(x_t + x_t^0)$$

$$\tau | \text{données} \sim \frac{n_2}{n_1} \text{bêta}_{//}(x_1 + x_1^0, x_2 + x_2^0)$$

Stratification: procédures bayésiennes

- On s'intéresse au paramètre $\tau = \frac{\sum_j n_{1,j} \lambda_{1,j} / n_1}{\sum_j n_{2,j} \lambda_{2,j} / n_2}$
- On applique le résultat précédent à chaque strate

Pour chaque strate (avec indépendance)

$$\lambda_{t,j} | \text{données} \sim \frac{1}{n_{t,j}} \text{gamma}(x_{t,j} + x_{t,j}^0)$$

- d'où les distributions marginales

$$n_t = \sum_j n_{t,j} \quad x_t = \sum_j x_{t,j} \quad x_t^0 = \sum_j x_{t,j}^0 \quad \lambda_t = \sum_j n_{t,j} \lambda_{t,j} / n_t$$

Pour toutes strates

$$\lambda_t | \text{données} \sim \frac{1}{n_t} \text{gamma}(x_t + x_t^0)$$

$$\tau | \text{données} \sim \frac{n_2}{n_1} \text{bêta}_{//}(x_1 + x_1^0, x_2 + x_2^0)$$

Méthodes bayésiennes et intervalle de Clopper-Pearson

- Intervalle de Clopper-Pearson $[L_\alpha^{\text{CP}}, U_\alpha^{\text{CP}}]$
- U_α^{CP} est la limite supérieure de l'intervalle de crédibilité bayésien pour la distribution *a priori*

$$x_1^0 = 1 \quad n_1^0 = 0 \quad x_2^0 = 0 \quad n_2^0 = 0$$

- L_α^{CP} est la limite inférieure de l'intervalle de crédibilité bayésien pour la distribution *a priori*

$$x_1^0 = 0 \quad n_1^0 = 0 \quad x_2^0 = 1 \quad n_2^0 = 0$$

- *A priori* de Jeffreys

Méthodes bayésiennes et intervalle de Clopper-Pearson

- Intervalle de Clopper-Pearson $[L_\alpha^{\text{CP}}, U_\alpha^{\text{CP}}]$
- U_α^{CP} est la limite supérieure de l'intervalle de crédibilité bayésien pour la distribution *a priori*

$$x_1^0 = 1 \quad n_1^0 = 0 \quad x_2^0 = 0 \quad n_2^0 = 0$$

- L_α^{CP} est la limite inférieure de l'intervalle de crédibilité bayésien pour la distribution *a priori*

$$x_1^0 = 0 \quad n_1^0 = 0 \quad x_2^0 = 1 \quad n_2^0 = 0$$

- *A priori* de Jeffreys

$$x_1^0 = \frac{1}{2} \quad n_1^0 = 0 \quad x_2^0 = \frac{1}{2} \quad n_2^0 = 0$$

Méthodes bayésiennes et intervalle de Clopper-Pearson

- Intervalle de Clopper-Pearson $[L_\alpha^{\text{CP}}, U_\alpha^{\text{CP}}]$
- U_α^{CP} est la limite supérieure de l'intervalle de crédibilité bayésien pour la distribution *a priori*

$$x_1^0 = 1 \quad n_1^0 = 0 \quad x_2^0 = 0 \quad n_2^0 = 0$$

- L_α^{CP} est la limite inférieure de l'intervalle de crédibilité bayésien pour la distribution *a priori*

$$x_1^0 = 0 \quad n_1^0 = 0 \quad x_2^0 = 1 \quad n_2^0 = 0$$

- *A priori* de Jeffreys

$$x_1^0 = \frac{1}{2} \quad n_1^0 = 0 \quad x_2^0 = \frac{1}{2} \quad n_2^0 = 0$$

Méthodes bayésiennes et intervalle de Clopper-Pearson

- Intervalle de Clopper-Pearson $[L_\alpha^{\text{CP}}, U_\alpha^{\text{CP}}]$
- U_α^{CP} est la limite supérieure de l'intervalle de crédibilité bayésien pour la distribution *a priori*

$$x_1^0 = 1 \quad n_1^0 = 0 \quad x_2^0 = 0 \quad n_2^0 = 0$$

- L_α^{CP} est la limite inférieure de l'intervalle de crédibilité bayésien pour la distribution *a priori*

$$x_1^0 = 0 \quad n_1^0 = 0 \quad x_2^0 = 1 \quad n_2^0 = 0$$

- *A priori* de Jeffreys

$$x_1^0 = \frac{1}{2} \quad n_1^0 = 0 \quad x_2^0 = \frac{1}{2} \quad n_2^0 = 0$$

Partie II - Inférence sur le rapport de deux proportions

- 1 Motivation / Objectifs
- 2 Modèles et procédures
 - Modèle de Poisson pour 2 groupes indépendants
 - Approche fréquentiste conditionnelle
 - Procédures fréquentistes non conditionnelles
 - Procédures bayésiennes
- 3 Exemples d'applications et comparaison des procédures
 - Applications numériques
 - Comparaison / Programme "LesCouvertures"
- 4 Conclusions
 - Discussion

Relation fréquentiste/bayésien

Exemple: nombre de crises

groupe 1 traitement	$x_1 = 8$	$n_1 = 3418$
groupe 2 placebo	$x_2 = 5$	$n_2 = 2781$

$$\tau \mid \text{données} \sim .8136 \text{Beta}_{II}(8 + x_1^0, 5 + x_2^0)$$

Intervalles 90%

Fréquentiste	[.447, 4.098]	Clopper-Pearson 'exact'
	[.607, 2.819]	'anti-exact'
	[.504, 3.538]	mid- <i>P</i>
bayésien	[.447, 2.819]	<i>a priori</i> (0, 0) (1, 0)
	[.607, 4.098]	<i>a priori</i> (1, 0) (0, 0)
	[.521, 3.376]	<i>a priori</i> ($\frac{1}{2}$, 0) ($\frac{1}{2}$, 0)

Relation fréquentiste/bayésien

Exemple: nombre de crises

groupe 1 traitement	$x_1 = 8$	$n_1 = 3418$
groupe 2 placebo	$x_2 = 5$	$n_2 = 2781$

$$\tau \mid \text{données} \sim .8136 \text{Beta}_{II}(8 + x_1^0, 5 + x_2^0)$$

Intervalle 90%

Fréquentiste	[.447, 4.098]	Clopper-Pearson 'exact'
	[.607, 2.819]	'anti-exact'
	[.504, 3.538]	mid- <i>P</i>
bayésien	[.447, 2.819]	<i>a priori</i> (0, 0) (1, 0)
	[.607, 4.098]	<i>a priori</i> (1, 0) (0, 0)
	[.521, 3.376]	<i>a priori</i> ($\frac{1}{2}$, 0) ($\frac{1}{2}$, 0)

Relation fréquentiste/bayésien

Exemple: nombre de crises

groupe 1 traitement	$x_1 = 8$	$n_1 = 3418$
groupe 2 placebo	$x_2 = 5$	$n_2 = 2781$

$$\tau \mid \text{données} \sim .8136 \text{Beta}_{II}(8 + x_1^0, 5 + x_2^0)$$

Intervalle 90%

Fréquentiste	[.447, 4.098]	Clopper-Pearson 'exact'
	[.607, 2.819]	'anti-exact'
	[.504, 3.538]	mid- <i>P</i>
bayésien	[.447, 2.819]	<i>a priori</i> (0, 0) (1, 0)
	[.607, 4.098]	<i>a priori</i> (1, 0) (0, 0)
	[.521, 3.376]	<i>a priori</i> ($\frac{1}{2}$, 0) ($\frac{1}{2}$, 0)

Programme "LesProportions"

LesProportions 1'

1 groupe 2 groupes indépendants LesImplications

Données g1\g2 initiale <- finale

somme/nombre des observations			Initiale gamma		initiale <- finale	
	s	n	s	n	s	n
g1	8	3418	0.0023	g1	1/2	0
g2	5	2781	0.0018	g2	1/2	0
	13	6199	0.0021		0	1000 0010

$\tau \sim 0.814 P_{\eta}(8.500, 5.500)$

Énoncé
 $Pr\{X < x\}$ $Pr\{X > x\}$
 $Pr\{x_1 < X < x_2\}$ $Pr\{X < x_1 \text{ ou } X > x_2\}$

Limites: 0.521, 3.376
 Probabilité: .9

décimales: limite 3
 distribution 3, probabilité 2

Précision

Calculer

Intervalle de confiance

Courbe
 p(x)
 Pr{X < x}
 Pr{X > x}

Intervalle de confiance

Intervalle de confiance

bilatéraux 0.90

- [0.521, 3.376] Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]
- [0.522, 3.681] Bayes initiale gamma s1=s2=0 n1=n2=0 uniforme
- [0.607, 4.098] Bayes initiale gamma s1=1 s2=0 n1=n2=0
- [0.447, 2.819] Bayes initiale gamma s1=0 s2=1 n1=n2=0
- [0.447, 4.098] conditionnel incluant 'exact' [Clopper-Pearson]
- [0.607, 2.819] conditionnel excluant
- [0.504, 3.539] conditionnel 'mid-p'
- [0.526, 3.222] score [Wilson]
- [0.511, 3.093] log-linéaire
- [0.524, 2.963] Wald/Add 2+2 [Agresti-Coull]
- [0.514, 3.385] Sahai-Khurshid
- [0.519, 3.655] Arc sinus
- [0.510, 3.325] Logit
- [0.511, 3.092] Logit corrigé [Anscombe]
- [0.520, 3.432] Second ordre corrigé
- [0.510, 3.325] Approximation normale
- [0.501, 3.633] Blaker
- [0.496, 3.896] Blyth-Still-Casella

Stratification: procédure bayésienne

- Exemple: nombre de crises dans une étude clinique

Données

Etudes →	x			n		
	1	2	3	1	2	3
groupe 1 traitement	7	1	0	2608	780	30
groupe 2 placebo	1	1	3	2258	494	29

- $x_1 = 8, x_2 = 5$

A priori de Jeffreys: $x_1^0 = x_2^0 = \frac{3}{2}, n_1^0 = n_2^0 = 0$

- Distribution a posteriori $\tau \sim .8136 \text{ Bêta}_{II}(9.5, 6.5)$
- Intervalle de crédibilité 90%

[.522, 2.938] au lieu de [.522, 3.376] pour les données groupées

Stratification: procédure bayésienne

- Exemple: nombre de crises dans une étude clinique

Données

Etudes →	x			n		
	1	2	3	1	2	3
groupe 1 traitement	7	1	0	2608	780	30
groupe 2 placebo	1	1	3	2258	494	29

- $x_1 = 8, x_2 = 5$

A priori de Jeffreys: $x_1^0 = x_2^0 = \frac{3}{2}, n_1^0 = n_2^0 = 0$

- Distribution a posteriori $\tau \sim .8136 \text{ B}\hat{\text{e}}\text{t}\alpha_{II}(9.5, 6.5)$
- Intervalle de crédibilité 90%

[.522, 2.938] au lieu de [.522, 3.376] pour les données groupées

Probabilités d'erreur de couverture: illustration

- Obtention des probabilités fréquentistes d'erreur inférieure et supérieure pour

$$n_1 = n_2 = 1000$$

$$.10 < \tau < 4$$

- Deux cas pour le paramètre parasite λ_2
 - $\lambda_2 = .04$: "petit taux" d'événements
 Les meilleures procédures fréquentistes et la solution de Jeffreys sont excellentes
 - $\lambda_2 = .004$: "très petit" taux d'événements
 Certaines procédures fréquentistes, pourtant optimales dans le cadre binomial, deviennent très mauvaises, très peu restent satisfaisantes; la procédure de Jeffreys reste excellente

Probabilités d'erreur de couverture: illustration

- Obtention des probabilités fréquentistes d'erreur inférieure et supérieure pour

$$n_1 = n_2 = 1000$$

$$.10 < \tau < 4$$

- Deux cas pour le paramètre parasite λ_2
 - $\lambda_2 = .04$: "petit taux" d'événements
Les meilleures procédures fréquentistes et la solution de Jeffreys sont excellentes
 - $\lambda_2 = .004$: "très petit" taux d'événements
Certaines procédures fréquentistes, pourtant optimales dans le cadre binomial, deviennent très mauvaises; très peu restent satisfaisantes; la procédure de Jeffreys reste excellente

Probabilités d'erreur de couverture: illustration

- Obtention des probabilités fréquentistes d'erreur inférieure et supérieure pour

$$n_1 = n_2 = 1000$$

$$.10 < \tau < 4$$

- Deux cas pour le paramètre parasite λ_2
 - $\lambda_2 = .04$: "petit taux" d'événements
Les meilleures procédures fréquentistes et la solution de Jeffreys sont excellentes
 - $\lambda_2 = .004$: "très petit" taux d'événements
Certaines procédures fréquentistes, pourtant optimales dans le cadre binomial, deviennent très mauvaises; très peu restent satisfaisantes; la procédure de Jeffreys reste excellente

Probabilités d'erreur de couverture: illustration

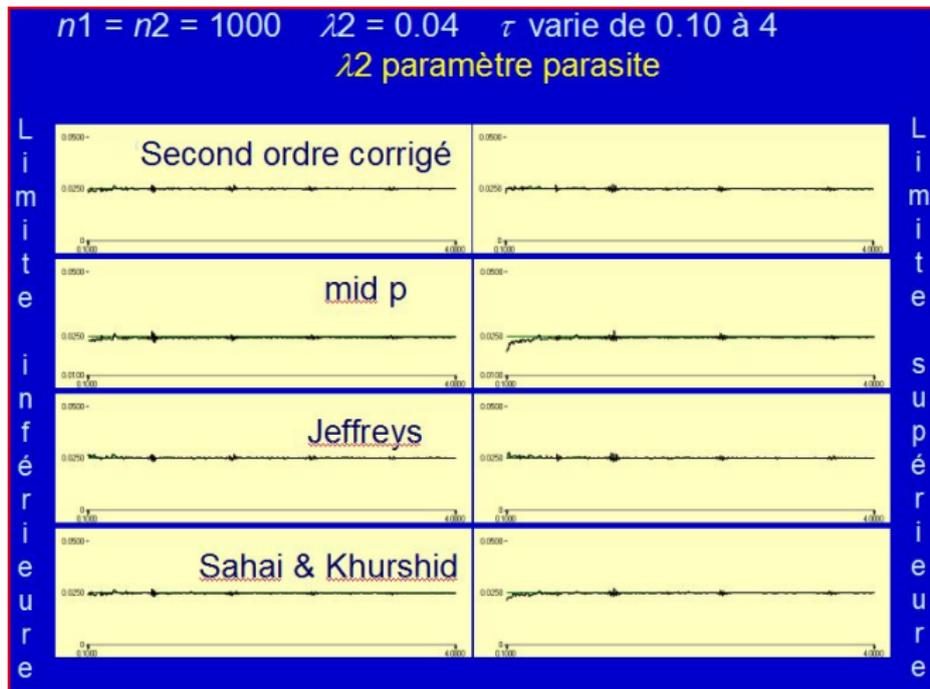
- Obtention des probabilités fréquentistes d'erreur inférieure et supérieure pour

$$n_1 = n_2 = 1000$$

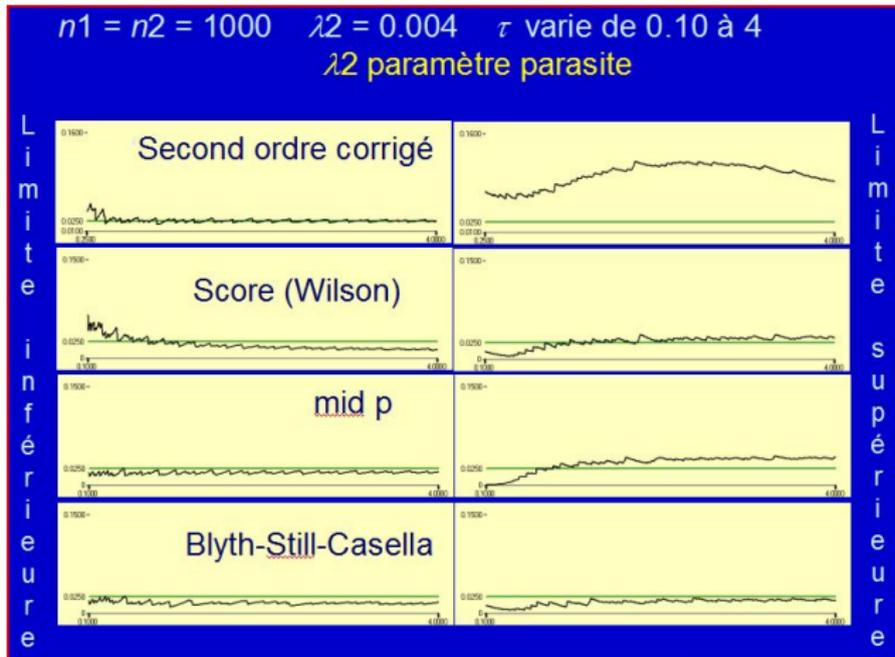
$$.10 < \tau < 4$$

- Deux cas pour le paramètre parasite λ_2
 - $\lambda_2 = .04$: "petit taux" d'événements
Les meilleures procédures fréquentistes et la solution de Jeffreys sont excellentes
 - $\lambda_2 = .004$: "très petit" taux d'événements
Certaines procédures fréquentistes, pourtant optimales dans le cadre binomial, deviennent très mauvaises; très peu restent satisfaisantes; la procédure de Jeffreys reste excellente

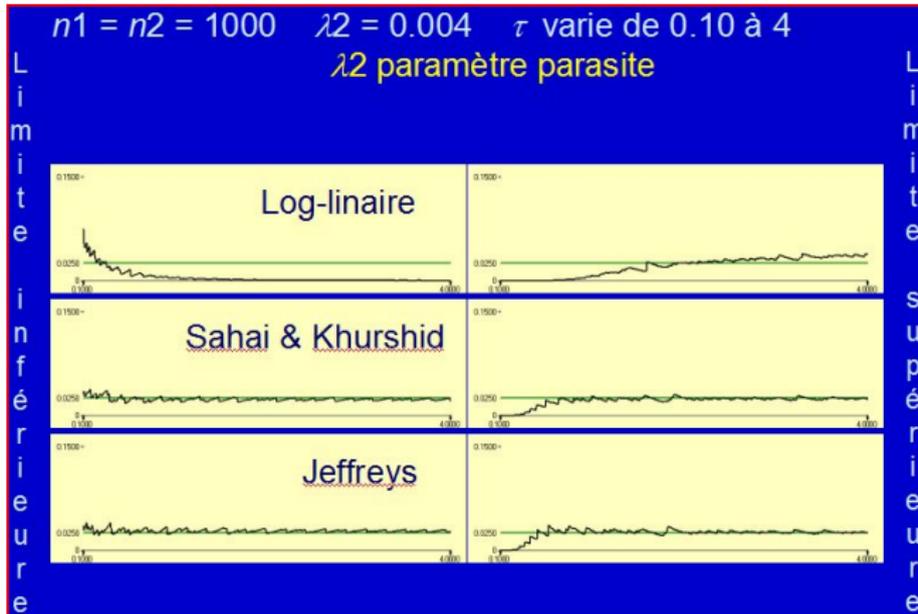
$\lambda_2 = .04$ – Exemple de quatre intervalles performants



$\lambda_2 = .004$ – Procédures conditionnelles

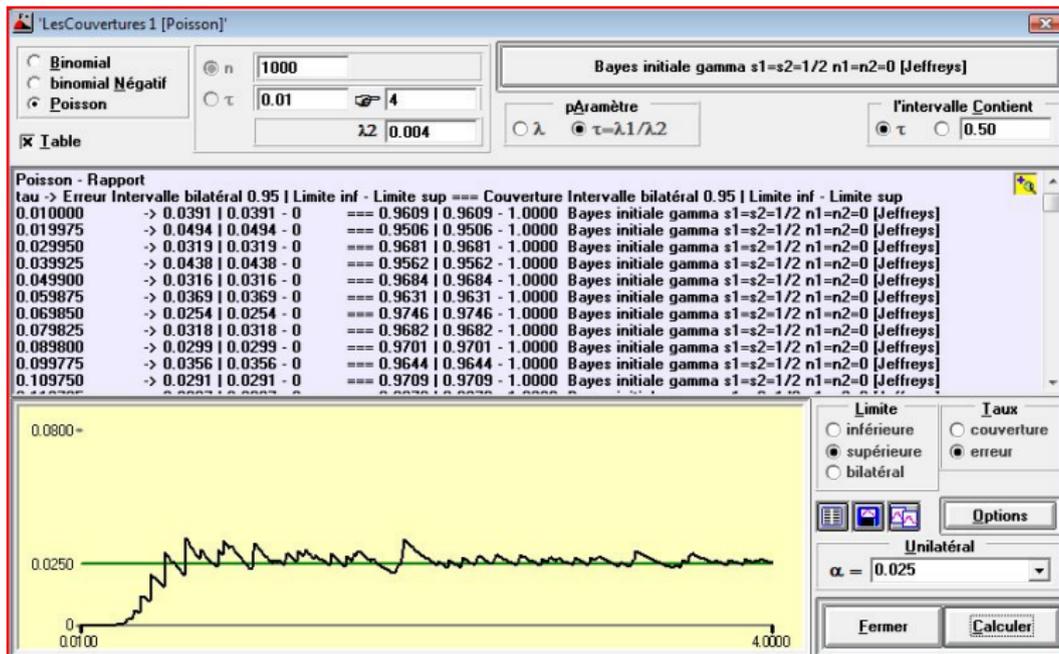


$\lambda_2 = .004$ – Jeffreys et Sahai & Kurshid restent très performants



Programme "LesCouvertures"

Exemple d'utilisation



Quel effectif? "Calcul de puissance"

On veut montrer que τ est plus petit que 3

On s'intéresse à la probabilité que la limite supérieure soit plus petite que 3 ("erreur")

LesCouvertures 1 [Poisson]

Binomial
 binomial Négatif
 Poisson

Table

n: 3000
 τ : 1/3
 λ : 0.002

Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]

paramètre: λ $\tau \rightarrow \lambda.1/\lambda.2$

l'intervalle Contient: τ 3

Poisson - Rapport

tau -> Erreur	Intervalle bilatéral 0.95	Limite inf.	Limite sup.	Couverture	Intervalle bilatéral 0.95 Limite inf. - Limite sup
0.333333	→ 0.8365 5.8806E-07 - 0.8365	=== 0.1635	1.0000 - 0.1635	Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]	
0.337500	→ 0.8343 6.4327E-07 - 0.8343	=== 0.1657	1.0000 - 0.1657	Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]	
0.341667	→ 0.8321 7.0270E-07 - 0.8321	=== 0.1679	1.0000 - 0.1679	Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]	
0.345833	→ 0.8300 7.6659E-07 - 0.8300	=== 0.1700	1.0000 - 0.1700	Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]	
0.350000	→ 0.8278 8.3521E-07 - 0.8278	=== 0.1722	1.0000 - 0.1722	Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]	
0.354167	→ 0.8256 9.0882E-07 - 0.8256	=== 0.1744	1.0000 - 0.1744	Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]	
0.358333	→ 0.8234 9.8769E-07 - 0.8234	=== 0.1766	1.0000 - 0.1766	Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]	
0.362500	→ 0.8212 1.0721E-06 - 0.8212	=== 0.1788	1.0000 - 0.1788	Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]	
0.366667	→ 0.8190 1.1623E-06 - 0.8190	=== 0.1810	1.0000 - 0.1810	Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]	
0.370833	→ 0.8167 1.2587E-06 - 0.8167	=== 0.1833	1.0000 - 0.1833	Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]	
0.375000	→ 0.8145 1.3616E-06 - 0.8145	=== 0.1855	1.0000 - 0.1855	Bayes initiale gamma s1=s2=1/2 n1=n2=0 [Jeffreys]	

Limite: inférieure supérieure bilatéral
 taux: couverture erreur

Options

Unilatéral: $\alpha = 0.025$

Fermer Calculer

Partie II - Inférence sur le rapport de deux proportions

- 1 Motivation / Objectifs
- 2 Modèles et procédures
 - Modèle de Poisson pour 2 groupes indépendants
 - Approche fréquentiste conditionnelle
 - Procédures fréquentistes non conditionnelles
 - Procédures bayésiennes
- 3 Exemples d'applications et comparaison des procédures
 - Applications numériques
 - Comparaison / Programme "LesCouvertures"
- 4 Conclusions
 - Discussion

Réponses apportées

- **Procédures fréquentistes:** certaines ont de bonnes performances, mais...

- Il est malaisé d'identifier lesquelles a priori
- De bonnes performances en bilatéral ne sont pas une garantie pour l'unilatéral
- Cela devient compliqué en cas de stratification

- Approche bayésienne objective (avec *a priori* de Jeffreys conduit à des procédures générales

- Le calcul des taux de couverture permet de s'assurer de la validité d'une méthode (en terme de performance fréquentiste)

Réponses apportées

- **Procédures fréquentistes:** certaines ont de bonnes performances, mais...

- Il est malaisé d'identifier lesquelles a priori

- De bonnes performances en bilatéral ne sont pas une garantie pour l'unilatéral

- Cela devient compliqué en cas de stratification

- **Approche bayésienne objective** (avec *a priori* de Jeffreys conduit à des procédures générales

- Le calcul des taux de couverture permet de s'assurer de la validité d'une méthode (en terme de performance fréquentiste)

Réponses apportées

- **Procédures fréquentistes:** certaines ont de bonnes performances, mais...

- Il est malaisé d'identifier lesquelles a priori
- De bonnes performances en bilatéral ne sont pas une garantie pour l'unilatéral
- Cela devient compliqué en cas de stratification

- **Approche bayésienne objective** (avec *a priori* de Jeffreys conduit à des procédures générales

- Le calcul des taux de couverture permet de s'assurer de la validité d'une méthode (en terme de performance fréquentiste)

Réponses apportées

- **Procédures fréquentistes:** certaines ont de bonnes performances, mais...

- Il est malaisé d'identifier lesquelles a priori
- De bonnes performances en bilatéral ne sont pas une garantie pour l'unilatéral
- Cela devient compliqué en cas de stratification

- **Approche bayésienne objective** (avec *a priori* de Jeffreys conduit à des procédures générales

- Performantes d'un point de vue fréquentiste, en unilatéral comme en bilatéral
- Très simples à obtenir, même en cas de stratification

- Le calcul des taux de couverture permet de s'assurer de la validité d'une méthode (en terme de performance fréquentiste)

Réponses apportées

- **Procédures fréquentistes:** certaines ont de bonnes performances, mais...

- Il est malaisé d'identifier lesquelles a priori
- De bonnes performances en bilatéral ne sont pas une garantie pour l'unilatéral
- Cela devient compliqué en cas de stratification

- **Approche bayésienne objective (avec *a priori* de Jeffreys** conduit à des procédures générales

- Performantes d'un point de vue fréquentiste, en unilatéral comme en bilatéral
- Très simples à obtenir, même en cas de stratification

- Le calcul des taux de couverture permet de s'assurer de la validité d'une méthode (en terme de performance fréquentiste)

Réponses apportées

- **Procédures fréquentistes:** certaines ont de bonnes performances, mais...
 - Il est malaisé d'identifier lesquelles a priori
 - De bonnes performances en bilatéral ne sont pas une garantie pour l'unilatéral
 - Cela devient compliqué en cas de stratification
- **Approche bayésienne objective (avec *a priori* de Jeffreys** conduit à des procédures générales
 - Performantes d'un point de vue fréquentiste, en unilatéral comme en bilatéral
 - Très simples à obtenir, même en cas de stratification
- Le calcul des taux de couverture permet de s'assurer de la validité d'une méthode (en terme de performance fréquentiste)

Réponses apportées

- **Procédures fréquentistes:** certaines ont de bonnes performances, mais...
 - Il est malaisé d'identifier lesquelles a priori
 - De bonnes performances en bilatéral ne sont pas une garantie pour l'unilatéral
 - Cela devient compliqué en cas de stratification
- **Approche bayésienne objective (avec *a priori* de Jeffreys** conduit à des procédures générales
 - Performantes d'un point de vue fréquentiste, en unilatéral comme en bilatéral
 - Très simples à obtenir, même en cas de stratification
- Le calcul des taux de couverture permet de s'assurer de la validité d'une méthode (en terme de performance fréquentiste)

Réponses apportées

- **Procédures fréquentistes:** certaines ont de bonnes performances, mais...
 - Il est malaisé d'identifier lesquelles a priori
 - De bonnes performances en bilatéral ne sont pas une garantie pour l'unilatéral
 - Cela devient compliqué en cas de stratification
- **Approche bayésienne objective (avec *a priori* de Jeffreys** conduit à des procédures générales
 - Performantes d'un point de vue fréquentiste, en unilatéral comme en bilatéral
 - Très simples à obtenir, même en cas de stratification
- Le calcul des taux de couverture permet de s'assurer de la validité d'une méthode (en terme de performance fréquentiste)

Autres considérations

- La procédure bayésienne s'applique conceptuellement de la même manière à l'inférence sur d'autres paramètres, par exemple la différence $\lambda_1 - \lambda_2$ (nécessite néanmoins une intégration numérique)
- Des résultats similaires sont obtenus pour d'autres modèles
 - Deux proportions binomiales (Agresti & Min, 2005)
 - Multinomial (Lecoutre & Charron, 2000)
 - *Play-The-Winner* (ElQasyr & Lecoutre, 2009)
- D'une manière générale

La solution de Jeffreys conduit à des procédures performantes

Autres considérations

- La procédure bayésienne s'applique conceptuellement de la même manière à l'inférence sur d'autres paramètres, par exemple la différence $\lambda_1 - \lambda_2$ (nécessite néanmoins une intégration numérique)
- Des résultats similaires sont obtenus pour d'autres modèles
 - Deux proportions binomiales (Agresti & Min, 2005)
 - Multinomial (Lecoutre & Charron, 2000)
 - *Play-The-Winner* (ElQasyr & Lecoutre, 2009)
- D'une manière générale

La solution de Jeffreys conduit à des procédures performantes

Autres considérations

- La procédure bayésienne s'applique conceptuellement de la même manière à l'inférence sur d'autres paramètres, par exemple la différence $\lambda_1 - \lambda_2$ (nécessite néanmoins une intégration numérique)
- Des résultats similaires sont obtenus pour d'autres modèles
 - Deux proportions binomiales (Agresti & Min, 2005)
 - Multinomial (Lecoutre & Charron, 2000)
 - *Play-The-Winner* (ElQasyr & Lecoutre, 2009)
- D'une manière générale

La solution de Jeffreys conduit à des procédures performantes

Merci pour votre attention