

Bruno LECOULTRE

			e4				
		5	49				
		80	59	54			
		5	35	31	31		
77	46	45	42	54			

L'ANALYSE

e1	e2	e3	e4	e			
52	48	31	32	3			
37	42	25	23	1			
34	26	24	23	19			
64	56	60	55	53			

BAYESENTINNE

	e2	e3	e4				
86	58	46	33	26			
76	76	34	FE	20			
88	49	66	37	37			
	66	59	48				

DES COMPARAISONS

Avant propos Henry ROUANET

Bruno Lecoutre

L'analyse bayésienne des comparaisons

Avant-propos d'Henry Rouanet

*Ouvrage publié avec le concours
du Centre National de la Recherche Scientifique*

Éditions de la Bibliothèque de la Recherche Scientifique
1982
ISBN 2-85389-182-1
© 1982
Tous droits réservés

PROCESSEUR INTRINSÈQUE DE LA RECHERCHE

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS par H. ROUANET

• DE L'ANALYSE DE LA VARIANCE A L'ANALYSE DES COMPARAISONS.....	3
• LE CONTEXTE.....	4
• LA PREMIERE EPOQUE DE L'ANALYSE DES COMPARAISONS: STRUCTURATION DES DONNEES ET PLANIFICATION DES ANALYSES.....	7
• DE L'ANALYSE DESCRIPTIVE A L'ANALYSE INDUCTIVE DES DONNEES.....	10
• LA DEUXIEME EPOQUE DE L'ANALYSE DES COMPARAISONS: L'INTRODUCTION DES METHODES FIDUCIAIRE ET BAYESIENNE	13
• EN GUISE DE CONCLUSION: STATISTIQUE BAYESIENNE ET STATISTIQUE TRADITIONNELLE: UN NOUVEAU PARADIGME?.....	21
• CE QU'EST EN BREF L'ANALYSE DES COMPARAISONS.....	23
• OU EN SOMMES-NOUS MAINTENANT?.....	25

* *
* *

INTRODUCTION A L'ANALYSE BAYESIENNE DES COMPARAISONS

1 DE L'ANALYSE DE LA VARIANCE CLASSIQUE.....	29
1.1 Les apports de l'analyse de la variance classique.....	29
1.2 Les insuffisances de l'analyse de la variance classique.....	30
2 ... A L'ANALYSE BAYESIENNE DES COMPARAISONS.....	31
2.1 Des questions de l'expérimentateur à la planification des analyses spécifiques.....	32
2.2 Le rôle primordial des procédures descriptives.....	33
2.3 Un principe essentiel: l'inférence spécifique.....	34
2.4 Le cadre bayésien et la place prépondérante accordée aux procédures fiducio-Bayésiennes.....	34
2.5 Du test de signification aux procédures bayésiennes.....	36
3 CONTENU DE L'OUVRAGE.....	37
3.1 Première partie: approche théorique.....	38
3.2 Deuxième partie: approche pratique.....	39
3.3 Plan général.....	40

PREMIERE PARTIE : APPROCHE THEORIQUE

CHAPITRE I - LA FORMALISATION ALGEBRIQUE

1 INTRODUCTION.....	45
1.1 Une notion primitive: la notion de protocole.....	45
1.2 Plan du chapitre.....	46
2 STRUCTURES ENSEMBLISTES:	
FACTEURS, RELATIONS ENTRE FACTEURS, PLAN D'ANALYSE.....	48
2.1 Facteurs.....	48
2.2 Relations d'emboîtement et de croisement	
Facteur composé complet, quasi-complet.....	48
2.3 Plan d'analyse - Type de plans $A \times G \times T$	51
3 STRUCTURES LINEAIRES FONDAMENTALES:	
PROTOCOLES, CONTRASTES, COMPARAISONS, SOMME-DES-CARRÉS.....	53
3.1 Dérivations: notion de protocole pondéré.....	53
3.2 Espace des protocoles numériques	
et espace des mesures de support J	54
3.3 Contraste et comparaison	
sur le support d'un protocole numérique pondéré.....	57
3.4 Somme-des-carrés d'un protocole numérique associée	
à un contraste, à une comparaison - Carré-moyen.....	58
3.5 Remontée des contrastes sur J en des contrastes sur I	60
4 TYPES DE COMPARAISONS POUR LES PLANS $A \times G \times T$ - DECOMPOSITIONS	
D'UN EMBOITEMENT, DECOMPOSITIONS D'UN CROISEMENT.....	62
4.1 Décompositions d'un emboîtement:	
comparaisons inter et intra.....	62
4.2 Décompositions d'un croisement:	
conditionnement et interaction.....	63
4.3 Différents types de comparaisons pour les plans $A \times G \times T$	66
4.4 Calcul des sommes-des-carrés dans les plans $A \times G \times T$	68
5 CARACTERISATION DE L'EFFET D'UN CONTRASTE, D'UNE COMPARAISON..	70
5.1 Préalable: effet d'un facteur,	
grandeur et représentant de l'effet.....	70
5.2 Effet d'un contraste, effet d'une comparaison.....	75
CHAPITRE II - DISTRIBUTIONS UTILES	
1 INTRODUCTION.....	79
1.1 Définitions générales.....	79
1.2 Notations.....	80
1.3 Distributions utilisées	
dans l'Analyse Bayésienne des Comparaisons.....	82
1.4 Plan du chapitre.....	82
2 DISTRIBUTIONS DE BASE USEELLES.....	83
2.1 Distribution normale.....	83
2.2 Distribution du χ^2 et distributions dérivées.....	84
2.3 Distribution de Wishart.....	85
2.4 Distribution de t non-centré.....	85
2.5 Distribution du F non-centré.....	85

3 DISTRIBUTIONS POUR L'ANALYSE BAYESIENNE DES COMPARAISONS.....	87
3.1 Distributions caractérisées comme mélange	
de distributions normales unidimensionnelles.....	87
3.2 Distributions caractérisées comme mélange	
de distributions normales multidimensionnelles.....	88
3.3 Distributions caractérisées comme mélange	
de distributions du χ^2	
et distributions dérivées.....	89
3.4 Distributions caractérisées comme mélange	
de distributions du t généralisé.....	91
3.5 Distribution caractérisée comme mélange	
de distributions du ψ^2	92
4 DENSITES UTILES.....	94
4.1 Formules de densité.....	94
4.2 Remarques sur le calcul des densités (et des moments)....	96

CHAPITRE III - L'INFERENCE SPECIFIQUE

1 INTRODUCTION.....	103
1.1 Structures statistiques.....	103
1.2 Effet théorique d'un contraste, d'une comparaison.....	106
1.3 Plan du chapitre.....	109
2 METHODES D'INFERENCE SPECIFIQUE.....	110
2.1 Inférence générale et inférence spécifique.....	110
2.2 Caractérisation d'une inférence bayésienne spécifique.....	112
2.3 Comment justifier une inférence spécifique?.....	115
2.4 Vers des solutions effectives simples.....	116
3 UNE STRUCTURE STATISTIQUE REMARQUABLE:	
LA STRUCTURE "MULTINOMIALE - KHI-DEUX".....	119
3.1 Définition du problème.....	119
3.2 Test de l'hypothèse nulle $\lambda = 0$	120
3.3 Procédures fiducio-bayésiennes.....	120
3.4 Distributions prédictives (fiducio-bayésiennes).....	125
3.5 Procédures bayésiennes: cas d'une distribution	
initiale de la même famille	
que la distribution fiducio-bayésienne.....	128
4 RECAPITULATIF DES RESULTATS ESSENTIELS POUR LA PRACTIQUE.....	132
4.1 Procédures fiducio-bayésiennes: si vous savez	
faire un test de signification.....	132
4.2 Procédures bayésiennes: si vous savez	
utiliser les procédures fiducio-bayésiennes.....	134
CHAPITRE IV - MODELES	
1 INTRODUCTION.....	137
1.1 Un modèle de base:	
le modèle "multinomial des groupes séparés".....	137
1.2 Plan du chapitre.....	138
2 LE MODELE MULTINORMAL DES GROUPES SEPARÉS.....	139
2.1 Définition et théorème fondamental.....	139
2.2 Corollaires.....	140
2.3 Un cas particulier:	
le modèle "normal des groupes séparés".....	142

3	MODELES POUR LES PLANS A<G>*T.....	144
3.1	Analyse d'une comparaison W/T1: modèles M_G/T_1	144
3.2	Analyse d'une comparaison W/G1: modèles M_G/W	147
3.3	Analyse d'une comparaison W.W.....	152
4	RESUME DES SOLUTIONS DU CHAPITRE.....	156

* * *

DEUXIEME PARTIE: APPROCHE PRATIQUE

CHAPITRE V - ILLUSTRATION DES PROCEDURES DE BASE

1	INTRODUCTION.....	163
1.1	Illustration d'une démarche.....	163
1.2	Une expérience d'apprentissage perceptif incident.....	163
1.3	Plan du chapitre.....	164
2	PRESENTATION ET STRUCTURATION DES DONNEES.....	166
2.1	Description de l'expérience.....	166
2.2	Représentation formalisée de l'expérience.....	168
2.3	Choix du plan d'analyse.....	172
2.4	Premières dérivations.....	173
3	ANALYSES SPECIFIQUES.....	180
3.1	Planification des analyses spécifiques.....	180
3.2	Analyse de la comparaison e1,e6/c1.....	181
3.3	Analyse de la comparaison c1,c2/e1.....	190
3.4	Analyse de la comparaison c1,c2,e1,e6.....	194
3.5	Analyse de la comparaison n1,n2.....	197
3.6	Analyse de la comparaison e1,e6,n1,n2/c1.....	203
3.7	Analyse de la comparaison c1,c2,n1,n2/e1.....	205
3.8	Analyse de la comparaison c1,c2,e1,e6,n1,n2.....	210
4	SYNTHESE DES RESULTATS.....	213

CHAPITRE VI - ILLUSTRATION DES PROCEDURES COMPLEMENTAIRES

1	INTRODUCTION.....	217
1.1	Procédures complémentaires.....	217
1.2	Plan du chapitre.....	217
2	COMPARAISONS A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE.....	219
2.1	Analyse de la comparaison n1,n2,n3.....	219
2.2	Analyse de la comparaison c1,c2,n1,n2,n3/e1.....	234
3	INFERENCE RELATIVE AU RAPPORT δ/σ OU AU RAPPORT λ/σ	240
3.1	Inférence fiducio-bayésienne relative au rapport δ/σ	240
3.2	Inférence fiducio-bayésienne relative au rapport λ/σ	243
4	UNE AUTRE PLANIFICATION POSSIBLE DES ANALYSES SPECIFIQUES.....	246
4.1	Analyse de la comparaison LIN E/c1.....	247
4.2	Analyse de la comparaison n1,n2,LIN E/c1.....	250
4.3	Analyse de la comparaison E-LIN E/c1.....	251
4.4	Analyse de la comparaison n1,n2,E-LIN E/c1.....	259
4.5	Analyse de la comparaison n1,n2,n3,E-LIN E/c1.....	262

5	COMBINAISON DES INFORMATIONS.....	266
5.1	Comparaisons à un degré de liberté (analyse d'un contraste).....	266
5.2	Comparaisons à plusieurs degrés de liberté.....	271
6	PROCEDURES PREDICTIVES.....	276
6.1	Procédures prédictives pour une réplique de l'expérience.....	276
6.2	Illustration d'une propriété des distributions prédictives.....	282
7	CAS NON-EQUILIBRE.....	285
7.1	Analyse de la comparaison e1,e6/c1.....	286
7.2	Analyse de la comparaison n1,n2,n3/h1*c1.....	289
7.3	Analyse de la comparaison n1,n2,n3,h1,h2/c1.....	292
7.4	Analyse de la comparaison n1,n2*h1,h2,E-LIN E/c1.....	295

TABLES

1	TABLES POUR LA DISTRIBUTION $t(d, e^2)$	301
1.1	Densité.....	301
1.2	Inférence sur l'effet d'un contraste: recherche de conclusion d'effet notable.....	302
1.3	Inférence sur l'effet d'un contraste: recherche de conclusion d'effet négligeable.....	303
2	TABLES POUR LA DISTRIBUTION $s\phi_{-1}^q$	305
2.1	Densité.....	305
2.2	Inférence relative au paramètre σ : recherche d'une limite supérieure.....	305
2.3	Inférence relative au paramètre σ : recherche d'une limite inférieure.....	306

BIBLIOGRAPHIE

* BIBLIOGRAPHIE SELECTIONNEE SUR L'ANALYSE DES COMPARAISONS.....	321
* AUTRES REFERENCES CITEES DANS LE TEXTE.....	325
* * *	
INDEX	
* INDEX DES PRINCIPALES DEFINITIONS	
DONNEES DANS LA PREMIERE PARTIE.....	329

C'est un grand plaisir pour moi d'écrire cet avant-propos pour l'ouvrage de Bruno Lecoutre. La construction de l'Analyse des Comparaisons est une entreprise dont les débuts remontent maintenant à quelque quinze années, et, sans entrer dans tous les détails et vicissitudes de cette entreprise, je profiterai de l'occasion pour partir un peu à la recherche du temps perdu, évoquer des étapes marquantes, apporter quelques éclairages, souligner certaines idées-force.

* DE L'ANALYSE DE LA VARIANCE A L'ANALYSE DES COMPARAISONS

D'un point de vue pragmatique, l'Analyse des Comparaisons, méthode d'analyse statistique des données expérimentales, n'est rien d'autre qu'un ensemble d'extensions de l'analyse de la variance traditionnelle. Et c'est un fait qu'à l'origine nous n'avions pas prémédité de remettre en cause le cadre de cette analyse traditionnelle, mais simplement d'utiliser toutes les ressources des mathématiques abstraites, alliées aux immenses possibilités ouvertes par le calcul automatique, pour améliorer les procédures existantes dans certaines situations particulières restées mal élucidées, mais tout à fait usuelles dans la pratique expérimentale, telles que les plans à mesures répétées, les plans non-orthogonaux, etc. Mais c'est un fait aussi que la construction a rapidement débouché sur des élargissements applicables à tout ensemble de données expérimentales, et plus généralement à tout ensemble de données structurées (et quelles données ne sont pas structurées?).

Résumons les plus importants de ces élargissements.

(1) Le tableau traditionnel d'analyse de la variance se rapporte à une certaine décomposition des sources de variation (la décomposition "canonique" liée au plan), laissant souvent de côté des questions importantes; l'élargissement a consisté à permettre, sous forme de planification des analyses, d'envisager toute comparaison pouvant s'exprimer dans le cadre du plan utilisé, sous forme de demande d'analyse (spécifique).

(2) Les tests F traditionnels permettent seulement de se prononcer sur l'existence des effets; ici l'élargissement a consisté à prolonger ces tests par des procédures (fiducio-bayésiennes) qui permettent de statuer sur l'importance des effets.

Même du seul point de vue pragmatique, ces élargissements aboutissent

à une refonte complète de l'analyse de la variance. Par ailleurs, par son déroulement, le champ de l'entreprise tendait à couvrir (et couvre effectivement à l'heure actuelle) des types de problèmes et de données qui ne relèvent pas de la notion de "variance". Par exemple, lorsque la variable dépendante est dichotomique, la planification des analyses, avec son langage des demandes d'analyses, conservera toute sa pertinence et sa portée, alors que les procédures d'évaluation seront des comparaisons de fréquences (et non plus de moyennes).

Pour désigner la construction nouvelle, l'appellation d'*Analyse des Comparaisons* s'est progressivement instaurée; elle renvoie nommément à la notion centrale de la méthode, celle de *comparaison* (le pendant, pour les données expérimentales ou plus généralement structurées, de la notion de corrélation pour les données d'observation), sans préjuger du type de données traitées ni de la procédure d'évaluation retenue.

* LE CONTEXTE

Avant d'évoquer les idées-force de l'Analyse des Comparaisons, j'évoquerai le contexte, le *Zeitgeist* (comme disent les Américains) dans lequel a pris corps l'Analyse des Comparaisons, en mentionnant deux courants, celui d'"analyse des données" pour l'orientation des développements, et celui de "mathématiques et sciences humaines" pour leur contenu.

Le courant d'analyse des données

Il faut rappeler, pour commencer, l'évolution rapide, au cours des années soixante, de l'attente et des exigences des chercheurs à l'égard de la statistique (et des statisticiens). Avec la disponibilité croissante de moyens de calcul puissants et diversifiés, se répandait le goût des analyses statistiques plus poussées, qu'il s'agisse de dégager les lignes de force d'un processus à partir d'une masse de données, ou de procéder à des analyses répondant à des questions fines.

A cette demande, à ce besoin, commençaient à répondre de nouveaux développements de la statistique, sachant mettre à profit les possibilités ouvertes par l'instrument informatique. Par delà leur diversité, ces développements présentent des parentés qui amènent à les regrouper sous l'appellation commune d'*analyse des données*.

"*Data analysis*": le terme est apparu chez les "Anglo-Saxons", dès les années cinquante, et le sens large dans lequel nous l'employons est bien

conforme à celui qu'il revêt dans la communauté statistique internationale (l'acceptation plus restrictive qu'on lui donne souvent en France sera évoquée plus loin).

Par delà les nouvelles techniques qu'elle a suscitées, l'analyse des données traduit avant tout un état d'esprit, une certaine orientation de la statistique, aussi éloignée d'une doctrine sectaire que d'une pratique laxiste, laquelle depuis une bonne vingtaine d'années maintenant aura imprégné peu ou prou tous les développements de la statistique tournés vers les applications. Pour appréhender cet état d'esprit, quelques déclarations fameuses dues (ou attribuées) à Tukey, le chef de file au franc parler de l'analyse des données, en diront plus que de longs discours: "C'est au statisticien de satisfaire l'usager, et non l'inverse!"; ou encore "Ce qui importe, ce sont les questions, bien plus que les modèles!". En clair, il est non seulement agréable et instructif, mais il est parfaitement légitime de regarder les données de près et de les interpréter, sans se tracasser outre mesure des intentions, des hypothèses qui ont pu présider à leur recueil.

Pour un psychologue, surtout s'il est de tempérament un peu clinicien, une telle orientation aura sans doute l'air d'aller presque de soi, et de définir le cadre le plus sage qui soit pour que se déroule avec fruit le fameux dialogue entre "mathématicien" et "psychologue". Ajoutons que cette orientation ne s'oppose nullement aux acquis de l'inférence statistique moderne, et que les méthodes d'analyse des données peuvent être aussi bien inductives que descriptives. Ainsi Tukey, par exemple, se réclame-t-il constamment des "pères fondateurs" et notamment de Fisher, le créateur de l'analyse de la variance (également inventeur, rappelons-le, de l'inférence fiduciaire).

En France, on le sait, le gros des développements de l'analyse des données a pris, sous l'impulsion de son chef charismatique, une tournure beaucoup plus radicale: "Le modèle doit suivre les données, non l'inverse", déclare Benzécri. Le parti-pris méthodologique consistant à privilégier à l'extrême la statistique descriptive restreint malencontreusement la portée de maintes contributions originales et fécondes. Pourquoi faut-il que tant d'"analystes de données" français, prenant au pied de la lettre la parole du maître, en viennent (certes en toute bonne foi) à confondre le tout avec la partie, en limitant l'"analyse de données" aux seules méthodes d'analyse descriptive multidimensionnelle exploratoire élaborées par Benzécri et son école? Cette façon de voir ne facilite guère le dialogue avec les utilisateurs de la statistique, sans parler des statisticiens de la communauté

internationale...

Arrêtons là cette digression (cf Rouanet et Lépine, 1976b) et revenons à l'Analyse des Comparaisons. Par son orientation, l'Analyse des Comparaisons est à situer dans le courant d'ensemble de l'analyse des données, mais elle s'oppose au courant particulier d'inspiration benzécriste par l'importance accordée, d'une part à la structuration des données, d'autre part à l'inférence statistique. Cela n'empêche que, sur le plan technique, il y ait bien des affinités entre l'Analyse des Comparaisons et les méthodes d'analyse des données développées en France, en premier lieu l'Analyse des Correspondances.

Les parentés essentielles concernent l'exploitation de la dualité entre "mesures et variables" dans le cadre de l'algèbre linéaire; les habilités de l'Analyse des Correspondances retrouveront, en Analyse des Comparaisons, maintes notations et termes familiers tels que les indices supérieur et inférieur, ainsi que la fameuse *inertie*, popularisée par l'Analyse des Correspondances, que nous avons reprise pour généraliser la traditionnelle "somme-des-carrés" de l'analyse de la variance. Toutes ces affinités seront de nature à faciliter, pour les statisticiens, les transferts entre les deux méthodes, voire, lorsque les données s'y prêtent, l'usage conjoint des deux méthodes (cf Le Roux et Rouanet, 1984); elles sont le produit d'interactions suivies avec Benzécristi, surtout dans les débuts, de 1964 à 1968. Ce n'est pas un hasard si c'est une élève de Benzécristi qui en 1967 entreprit avec nous une collaboration informatique qui devait conduire aux programmes informatiques de la série VAR. Ensuite, ces affinités reflètent une participation commune au courant de la formalisation algébrique dont je parlerai maintenant.

Le courant "mathématiques et sciences humaines" et la formalisation algébrique

Plus encore que pour l'analyse des données, il s'agit, non pas d'une école, mais d'un courant, disons d'un double mouvement. D'un côté des chercheurs en sciences humaines, qui mirent une espérance dans les mathématiques (distinguées, ici, de la statistique regardée comme une discipline auxiliaire), en tant que langage apte à exprimer des trouvailles essentielles de leur discipline; de l'autre côté des mathématiciens, qui ne dédaignèrent point de prendre cette espérance au sérieux.

De même que le courant d'analyse des données, le courant "mathématiques et sciences humaines" a certainement été international; dans les pays

anglo-saxons, il a conduit à la constitution de nouvelles spécialités comme la "psychologie mathématique" et la "sociologie mathématique". Dans le milieu français, il a été distinctivement marqué par une prédilection pour les aspects "abstrait" des mathématiques (par opposition aux aspects "quantitatifs"). Rappelons-nous, dans le grand public, la vague (ou la vogue) de l'"algèbre moderne" et, chez les chercheurs en sciences humaines, celle du structuralisme: à l'aide de la théorie mathématique des groupes, on allait pouvoir dire les structures de parenté, etc.

Dans ce contexte, une influence hors de pair: celle de G. Th. Guilbaud, dont l'enseignement, notamment son merveilleux séminaire à l'École Pratique des Hautes Etudes, aura été une source inépuisable pour tant de chercheurs, pendant tant d'années; pour moi, pour les développements de l'Analyse des Comparaisons, cette source reste aussi vivante en 1983 qu'elle l'était en 1963, lorsque fut fondée, par un groupe pluridisciplinaire animé par Guilbaud, la revue "*Mathématiques et Sciences Humaines*": une entreprise en soi, dont je me suis senti partie prenante dès le début, et qui allait accueillir nombre de contributions relatives à l'Analyse des Comparaisons, en premier lieu celles portant sur la formalisation algébrique (Rouanet, Rogalski et Lépine, 1968; Rouanet et Lépine, 1976). C'est cet aspect de formalisation algébrique qui devait conférer d'emblée à l'Analyse des Comparaisons sa marque distinctive par rapport à l'analyse de la variance d'inspiration anglo-saxonne.

* LA PREMIERE EPOQUE DE L'ANALYSE DES COMPARAISONS: STRUCTURATION DES DONNEES ET PLANIFICATION DES ANALYSES

Je me trouvais situé depuis 1965 dans un laboratoire de psychologie expérimentale. Préposé aux "affaires mathématiques et statistiques", je me convainquis rapidement que les difficultés liées aux "petits problèmes statistiques" des chercheurs n'étaient pas imputables à leurs seules "ignorances" de praticiens qui auraient imparfaitement assimilé la "théorie statistique", mais que c'était bel et bien cette théorie qu'il convenait d'améliorer sur plus d'un point, pour mieux prendre en compte les exigences d'analyse de données des chercheurs. Bien entendu, les améliorations allaient peut-être conduire à compliquer les procédures traditionnelles, mais, en cas de besoin, l'ordinateur était là désormais pour mettre les nouvelles procédures en oeuvre, à condition bien sûr de s'assurer du concours d'un informaticien. Il advint que Dominique Lépine, également situé dans ce même

Laboratoire, partageait les convictions précédentes, et que Marie-Odile Lebeaux, du laboratoire statistique de Benzécri, était prête à apporter sa compétence informatique. En quelques semaines, au cours de l'été 1967, la théorie statistique de la structure de plan $S \times T$ fut achevée, le programme VAR 1 rédigé. Ainsi prenait naissance une collaboration "informelle", qui devait se poursuivre jusqu'en 1978.

Ce que j'appellerai la "première époque" de l'Analyse des Comparaisons (en gros de 1967 à 1971) regroupe les principales étapes de construction suivantes.

- Mise en place par H. Rouanet et D. Lépine de la *formalisation linéaire*, autour de la notion de *comparaison* (cf Rouanet, Rogalski et Lépine, 1968, et Rouanet et Lépine, 1976).

(Les dates des textes cités en référence sont parfois très postérieures à l'élaboration des notions correspondantes, et à leur mise en oeuvre dans les programmes informatiques.)

- Etude des conditions de validité des tests F relatifs aux structures de plans remarquables $S \times G$, $S \times T$, $S \times G \times T$ (cf notamment Rouanet et Lépine, 1970).

- Réalisation, par M.-O. Lebeaux, des premiers *programmes informatiques*: VAR 1 en 1967 et VAR 2 en 1971, avec les demandes d'analyse par vecteurs.

Vers une méthodologie formalisée

En réalité, par delà les recherches "statistiques", se profilait pour nous "un grand dessein", dont la réalisation aurait constitué notre contribution propre au courant "mathématiques et sciences humaines": élaborer une méthodologie formalisée, intégrant les diverses phases de la démarche expérimentale, depuis l'explicitation des objectifs jusqu'à la formulation des conclusions, en passant par la planification du recueil des données et l'analyse statistique des données recueillies. L'Analyse des Comparaisons, dans son état actuel, peut être regardée comme la partie réalisée de ce grand dessein.

Pour le grand public, voire le commun des chercheurs, la statistique apparaît un peu comme le royaume d'élection du "numérique"; pourtant, en amont des "chiffres" sur lesquels portera bien sûr le traitement des données, il y a les structures qui conditionneront ce traitement, et il y a les questions que le chercheur se pose dans le cadre de ces structures. Par exemple, la structure de *croisement* entre facteurs commande la question

de l'*interaction* entre ces facteurs, etc.

D'emblée l'explicitation de ces structures en termes algébriques nous est apparue comme la clef de l'élaboration d'une méthodologie formalisée. Dans Rouanet, Rogalski et Lépine (1968), nous formulons le diagnostic suivant: "Une source essentielle de difficultés (dans la mise en oeuvre des procédures) réside dans la distance entre les intentions du chercheur et les procédures de calcul. Or... les structures mathématiques sous-jacentes aux procédures se trouvent souvent, en réalité, plus proches des intentions du chercheur que les procédures de calcul elles-mêmes: d'où l'intérêt pratique d'explicitier ces structures".

Un tel diagnostic était porteur d'un programme de recherches, dont la fécondité devait peu à peu se révéler dans toute son ampleur; les structures abstraites pouvaient être directement utiles, non seulement pour faire apparaître la "raison d'être" des procédures existantes, mais aussi pour en susciter de nouvelles, en cernant d'emblée leur champ de pertinence. Progressivement furent mises en place les deux composantes de la formalisation algébrique de l'Analyse des Comparaisons: la *formalisation linéaire* et la *formalisation ensembliste*.

Je me bornerai ici à évoquer la formalisation linéaire (la formalisation ensembliste, bien qu'en bonne logique plus fondamentale, a été mise en place sensiblement plus tard: cf Lépine, 1977a et 1977b). L'*univers des questions* que l'on peut se poser dans le cadre d'un plan donné peut être structuré en espace vectoriel euclidien. Les vecteurs de cet espace, qui sont les contrastes, généralisent l'idée de comparaison élémentaire (comparer deux moyennes, deux fréquences, etc.), et engendrent les comparaisons à un degré de liberté. Les sous-espaces vectoriels formalisent la notion de comparaison à plusieurs degrés de liberté (comparer plusieurs moyennes, etc.). Jusqu'ici la construction est totalement indépendante de la nature de la variable dépendante analysée, à plus forte raison du choix des procédures d'évaluation. Pour une variable numérique, la construction va s'enrichir, car l'univers des questions deviendra l'espace dual (au sens de l'algèbre linéaire) de l'espace des protocoles, un contraste devenant une forme linéaire sur l'espace des protocoles. Toute la force de l'algèbre linéaire pourra alors jouer à plein; à son tour elle conduira naturellement aux extensions multidimensionnelles, aux applications aux tableaux de contingence (à ce point, on rejoindra l'Analyse des Correspondances), etc.

Planification des analyses et Analyse descriptive des Comparaisons

Les notions sous-jacentes à la planification des analyses ont été mises en place progressivement, au fur et à mesure notamment de l'élaboration des programmes informatiques; je me contenterai ici d'énumérer les principaux mots-clés: *plan d'analyse*, défini par les facteurs déclarés et leurs relations (croisements, emboîtements, etc.); *plan quasi-complet*, exprimable par une formule de plan (par exemple $A \times B \times C \times D$); *niveau d'analyse* et *formule de demande d'analyse*. Ainsi, avec le plan d'analyse $A \times B \times C \times D$, on pourra examiner l'interaction entre les facteurs A et B au niveau d'analyse global (c'est-à-dire en moyennant sur les modalités des autres facteurs, d'où la demande d'analyse notée A.B), ou à un niveau d'analyse local, par exemple A.B/d1 (interaction restreinte à la modalité d1 du facteur D), etc.; à chaque demande d'analyse correspondra une *dérivation* particulière, conduisant au *protocole pertinent* relatif à cette demande d'analyse.

Grâce à la planification des analyses, les données structurées pourront faire l'objet d'investigations systématiques. Quant aux procédures d'évaluation à mettre en oeuvre dans les demandes d'analyse, on pourra envisager, pour commencer, des *procédures descriptives*, d'où ce que nous appelons l'*Analyse descriptive des Comparaisons* (cf Duquenne, 1976).

Insistons bien sur le fait qu'il n'y a, dans l'analyse descriptive, aucune raison de se limiter aux effets globaux, de se borner à la recherche des "grandes lignes" qui se dégagent des données: l'Analyse des Comparaisons n'est pas une entreprise de raboutage des données. Les demandes d'analyse peuvent porter sur tous les "points fins" sur lesquels peut souvent se concentrer tout l'intérêt d'une recherche, tels que les interactions locales, etc. Les conclusions descriptives porteront notamment sur l'importance ou la non-importance, du point de vue descriptif, des effets examinés.

L'Analyse descriptive des Comparaisons devrait toujours constituer une étape indispensable et cruciale. Si l'on appelle procédures "hors-statut" l'ensemble des procédures exploratoires souvent pratiquées en marge, ou en amont, des tests *F* traditionnels, l'Analyse descriptive des Comparaisons apparaît comme une mesure d'intégration des procédures hors-statut.

* DE L'ANALYSE DESCRIPTIVE A L'ANALYSE INDUCTIVE DES DONNEES

Avant d'aborder la "deuxième époque" de l'Analyse des Comparaisons, je me livrerai à quelques considérations sur l'analyse des données et

l'inférence statistique.

Visée inductive et procédures d'inférence statistique

Dans certaines situations, on peut être amené à ne pas aller au delà des analyses descriptives. Il n'en demeure pas moins que dans toute recherche (en tout cas dans toute recherche expérimentale), la *visée inductive*, c'est-à-dire généralisante, est présente, voire prédominante; le problème de la généralisabilité des conclusions descriptives (toujours fondées sur des données forcément limitées) est proprement "incontournable". Manifestement, les chercheurs attendent de la statistique qu'elle les éclaire, non seulement sur la *teneur*, mais sur la *portée* des traits qui se dégagent de leurs données. D'où l'importance et l'intérêt des procédures expressément conçues pour répondre à cette visée inductive: ce qu'on a l'habitude d'appeler les procédures d'*inférence statistique*.

(Je laisserai ici de côté le réexamen, la réévaluation des procédures d'inférence statistique selon des cadres de justification et d'interprétation plus proches de la visée descriptive que de la visée inductive, réévaluation sur laquelle portent nos recherches en cours sur ce que nous appelons l'*inférence ensembliste*.)

Du point de vue d'analyse des données qui nous concerne ici, l'*existence inductive* peut être caractérisée clairement: le but de l'*analyse inductive des données* sera de tenter (dans la mesure du possible) de *prolonger les conclusions descriptives* à une population parente, dont les données sont censées constituer un échantillon. Il va de soi, dans cette perspective, qu'on devra s'attacher à *cerner l'apport propre aux données*, à dégager "ce que les données ont à dire", indépendamment ou, si l'on préfère, en *faisant abstraction* des informations étrangères à ces données.

Les tests de signification et leur insuffisance

La principale méthode d'inférence statistique - en tout cas la plus usitée à l'heure actuelle - est le *test de signification*, lequel, s'agissant de données expérimentales, prend la forme des classiques tests *F* de l'analyse de la variance.

L'usage du test de signification, dans la pratique de la recherche, a le mérite de rappeler que la statistique descriptive n'est pas tout: rôle de "garde-fou", maintes fois souligné, contre la généralisation hâtive; rôle exploratoire en tout cas (on ne répétera jamais assez que les procédures inductives peuvent être exploratoires, tout autant que les procédures descriptives).

Mais une mesure prophylactique élémentaire n'est pas une panacée: du point de vue d'analyse inductive des données, l'insuffisance des tests de signification usuels (correctement interprétés), en premier lieu des tests F , saute aux yeux.

En effet, les conclusions descriptives portent le plus souvent sur l'importance (ou la non-importance) des effets examinés: dans la plupart des situations, c'est donc sur l'importance (ou la non-importance) de ces effets que le chercheur souhaitera se prononcer inductivement. Or, la conclusion permise par le test F reste muette sur ce problème. Un résultat "significatif" (à l'un des seuils repères usuels) indique en effet que l'existence de l'effet parent est bien établie, mais sans préjuger de son importance; à l'inverse, un résultat "non-significatif" n'est à strictement parler qu'un constat d'ignorance: ne pas établir l'existence d'un effet n'équivaut sûrement pas à établir la non-existence de cet effet! L'information apportée par le test de signification, même lorsqu'elle est "valide", reste donc en général largement insuffisante.

On distinguera la critique précédente des rituelles mises en garde s'en prenant à l'"abus des tests". Disons-le sans ambages: le véritable scandale, la "mascarade" (comme le dit Guttman) dans l'usage des tests tient beaucoup moins à leur emploi excessif qu'au statut de critère d'administration de la preuve que leur confèrent certaines instances de légitimation (cf Guttman, "*The star worshippers*", où le célèbre sociologue s'en prend aux normes assez peu "scientifiques" de la sacro-sainte revue *Science*).

Ajoutons enfin que notre critique des tests de signification n'a rien de très original; elle a été émise depuis longtemps par les chercheurs les plus avertis (voir notamment Reuchlin, dans *Méthodes quantitatives en psychologie*, 1962, page 256). Le vrai problème, en fait, nous apparaissait beaucoup moins de constamment rappeler les chercheurs à l'ordre, que de leur fournir de véritables procédures d'analyse inductive des données allant au delà des tests.

Or, à la fin de la "première époque", l'Analyse des Comparaisons, qui permettait désormais d'élargir et d'affiner les questions posées aux données, aboutissait, comme l'analyse de la variance traditionnelle, sur ce qui apparaissait de plus en plus, conséquence inattendue des progrès réalisés, comme un goulot d'étranglement: la méthodologie étriquée des tests de signification.

C'est pour remédier concrètement à cette insuffisance méthodologique

fondamentale qu'a été pris le "tournant", la "rupture" de fin 1973, qui marque le début de la "deuxième époque" de l'Analyse des Comparaisons.

* LA DEUXIEME EPOQUE DE L'ANALYSE DES COMPARAISONS: L'INTRODUCTION DES METHODES FIDUCIAIRE ET BAYESIENNE

En cherchant (pour tout dire, à force de chercher) des méthodes prolongeant les tests F dans le sens souhaité, tout en s'insérant (exigence absolue) dans la construction déjà élaborée, D. Lépine et moi-même avons été amenés à nous tourner vers les théories de l'inférence statistique qui, à l'encontre de la théorie traditionnelle, conduisent à des distributions sur l'espace paramétrique, à savoir les théories fiduciaire et bayésienne.

Ainsi commença ce que j'appellerai la "deuxième époque" de l'Analyse des Comparaisons (en gros de 1974 à 1977), avec les principales étapes de construction suivantes.

- Intégration, par H. Rouanet et D. Lépine, des méthodes *fiducio-bayésiennes* (cf Lépine et Rouanet, 1975; Rouanet, 1977), et premières mises en oeuvre sur des données concrètes (cf Rouanet, Lépine et Pelnard-Considère, 1976; Rouanet, Lépine et Holender, 1978; Lecoutre et Lecoutre, 1979).
- Elaboration et réalisation, par M.-O. Lebeaux (avec la participation de Vincent Duquenne), du programme VAR 3, avec les demandes d'analyse par *formules* (cf Lépine, Rouanet et Lebeaux, 1976).

• Mise en place de la notion d'*inférence spécifique* par H. Rouanet et D. Lépine, avec la participation de B. Lecoutre (cf Lecoutre, 1978; Rouanet et Lecoutre, 1983).

Dès 1975, les idées-force de l'Analyse des Comparaisons étaient ainsi constituées pour l'essentiel (cf Rouanet, 1979), avec un programme informatique - le programme VAR 3 - dont le langage de commande permettait commodément la planification des analyses. Le texte "*Introduction à l'analyse des comparaisons pour le traitement des données expérimentales*", rédigé en 1977 (Rouanet et Lépine, 1977), fournissait une première vue d'ensemble sur l'Analyse des Comparaisons et ses applications.

La greffe fiducio-bayésienne

Entendons nous-bien: inférence fiduciaire et inférence bayésienne ne constituent pas des "théories nouvelles". Tout étudiant en probabilité entend parler, peu ou prou, du théorème de Bayes; et tout statisticien ayant

parcouru les ouvrages de Fisher est tombé un jour sur les considérations fiduciaires chères à son auteur. Mais, il faut bien le dire, les applications de ces théories aux données concrètes, à quelques remarquables exceptions près (voir notamment Box et Tiao, 1973), faisaient surtout figure d'exercices d'école, comparées à la profusion des applications fondées sur la théorie statistique traditionnelle. C'est pourquoi il n'y avait (et il n'y a toujours) rien de surprenant à ce qu'une bonne majorité des utilisateurs de la statistique négligeassent, voire carrément ignorent jusqu'à l'existence de ces théories; et cela en dépit (ou peut-être à cause) de quelques textes méthodologiques rédigés à leur intention, qui, tout en suggérant l'éventuelle *désirabilité* d'approches "non-conventionnelles", restaient trop discrets quant à leur *faisabilité*, du moins s'agissant de procédures destinées à un usage courant (ce que nous appelons des procédures standard).

(Bornons-nous à une seule référence, mais qui à la relecture me paraît bien refléter un point de vue assez largement répandu, encore à l'heure actuelle, parmi les "méthodologistes": Rouanet, *Les modèles stochastiques d'apprentissage*, 1967, pages 11 à 18).

Cette carence était particulièrement flagrante dans un domaine comme l'analyse des données expérimentales, pour lesquelles on dispose dans le cadre de la statistique traditionnelle de tout un arsenal de procédures standard, adaptées à toutes sortes de plans expérimentaux usuels même assez complexes.

Finalement, l'innovation de la "deuxième époque" de l'Analyse des Comparaisons a donc consisté à introduire des principes de statistique inductive restés jusque là peu ou mal exploités, et à "prouver le mouvement en marchant" en construisant, à l'aide de ces principes, des procédures effectives élargissant la construction en cours. On voit donc où se situait la nouveauté, l'originalité: non pas dans le "greffon", mais dans l'opération de greffe elle-même, dans le fait que cette opération ait pu réussir, surmontant un double obstacle idéologique et technique. En clair, il s'agissait d'apporter la double preuve que des procédures, allant au delà des tests de signification, étaient à la fois désirables et faisables.

Avant d'en venir au premier point, la *désirabilité*, comme ce texte ne vise pas seulement à prêcher les convertis, il me paraît nécessaire de reprendre, en les insérant dans notre problématique, les idées de base de l'inférence fiduciaire et de l'inférence bayésienne.

L'inférence fiduciaire ("fiducial inference")

Les principes de l'inférence fiduciaire ont été posés par R.A. Fisher, dans les années trente, pour répondre expressément à l'exigence d'analyse des données inductive telle que je l'ai caractérisée précédemment.

Il se trouve que dans certaines situations, dont le paradigme est l'inférence sur une moyenne sous le modèle normal usuel, on peut, à partir des données et du modèle d'échantillonnage, construire par un raisonnement très intuitif, dit du pivot, une distribution sur l'espace paramétrique: cf Fisher, *Statistical Methods and Scientific Inference*, 1956. Cette distribution constitue la réponse fiduciaire au problème de l'analyse inductive des données, en ce sens qu'elle permet d'exprimer, par un jugement probabiliste, l'incertitude sur la valeur du (ou des) paramètre(s), compte tenu des données recueillies; elle peut être interprétée comme exprimant l'apport propre aux données.

(Pour aborder au mieux - ou pour approfondir - le point de vue fiduciaire, je ne saurais trop recommander de s'en rapporter à Fisher lui-même, plutôt qu'aux présentateurs ou commentateurs de seconde main. Des remarques analogues valent pour les conceptions bayésiennes de Jeffreys ou de de Finetti citées plus loin.)

Un mot sur le terme "*Fiducial*" introduit par Fisher. *Fiducia* = confiance: de même que la confiance accordée au papier-monnaie procède (ou du moins naguère procédait) de la valeur sûre que constitue son équivalent en or, de même la confiance accordée à la probabilité fiduciaire procède de la probabilité d'échantillonnage, "valeur sûre" sur laquelle elle est fondée.

Quant à l'emploi du mot français "fiduciaire", il est en harmonie avec l'usage technique de ce terme en économétrie ("monnaie fiduciaire fondée sur la confiance accordée à celui qui l'émet" lit-on dans le *Petit Robert*) et avec son usage littéraire (*Les Cahiers* de Valéry).

Malgré sa séduction certaine et les promesses d'avenir dont à mon avis elle reste porteuse, je ne m'étendrai pas davantage ici sur la méthode fiduciaire. En effet, le raisonnement du pivot n'est applicable que dans des situations assez restrictives, et la manière dont il conviendrait de l'élargir pour l'adapter à des situations plus générales est loin d'être évidente. C'est pour cette raison (sans doute) que peu de statisticiens se sont risqués (jusqu'à présent) à emboîter le pas à Fisher dans son entreprise fiduciaire. A l'heure actuelle, la majorité des statisticiens qui

construisent des distributions sur l'espace paramétrique préfèrent le faire en se servant du cadre bayésien, dont la "règle du jeu" leur apparaît plus clairement. Au demeurant, c'est ainsi que nous avons procédé, dès que nous avons abordé des situations complexes telles que les comparaisons à plusieurs degrés de liberté.

J'adopterai ici le point de vue consistant à assimiler les distributions fiduciaires élémentaires (celles qui interviennent en Analyse des Comparaisons) à des distributions bayésiennes particulières, que nous appelons "fiducio-bayésiennes", en accord avec la terminologie qui sera évoquée plus loin.

L'inférence bayésienne

L'origine de l'inférence bayésienne est beaucoup plus lointaine, puisque c'est Bayes, dans son célèbre mémoire posthume de 1763, qui en fut l'instigateur (comme c'est bien connu), et que c'est Laplace, dans ses premiers travaux statistiques, qui en fut le véritable créateur (comme c'est moins connu et comme l'ont bien montré les récentes recherches historiques de Bernard Bru).

Les développements contemporains de la statistique bayésienne, considérables dès les années trente, sont attachés aux noms les plus illustres; citons au moins l'Italien de Finetti, dont l'ouvrage de synthèse, *Teoria della Probabilità* (1970), a été traduit (de Finetti, 1974) et l'Anglais Jeffreys (cf Jeffreys, 1961). A l'heure actuelle, les développements de la statistique bayésienne, du moins sur le plan théorique, sont extrêmement actifs (tout au moins "à l'étranger").

A la différence de l'approche fiduciaire, l'approche bayésienne met en jeu, outre le modèle d'échantillonnage traditionnel, une *distribution initiale* sur l'espace paramétrique; cette distribution initiale permet de dériver, via le théorème de Bayes, une distribution de probabilité finale (on dit aussi "révisée") sur l'espace paramétrique, laquelle constituera la réponse bayésienne au problème inductif, en ce sens qu'elle permet, comme la distribution fiduciaire, d'exprimer par un jugement probabiliste notre incertitude sur la valeur des paramètres, compte tenu des données recueillies (mais aussi de l'incertitude exprimée par la distribution initiale). Et, si de nouvelles données sont recueillies, on pourra prendre la distribution finale comme distribution initiale, d'où une distribution finale qui incorporera les apports des données successives.

On voit ainsi que le cadre bayésien n'est rien de moins qu'une théorie formalisée de l'apprentissage par l'expérience. Cet aspect essentiel de l'inférence bayésienne, sur lequel a inlassablement et magistralement insisté de Finetti, a été repris récemment par Suppes: *Logique du probable*, 1981 (titre original de l'ouvrage: *The Bayesian Approach of Rationality*).

Cet attrait conceptuel s'accompagne, sur le plan technique, d'une prodigieuse souplesse, qui fait de l'inférence bayésienne un outil adaptable à des problématiques et des méthodologies diversifiées. En comparaison, les autres approches apparaissent toutes, du moins dans leur état actuel, plus ou moins vouées aux justifications *ad hoc* (aux "adocqueries" comme le dit joliment I.J. Good).

Comme il a été dit plus haut, on a, en statistique bayésienne, par rapport à l'inférence traditionnelle (et à l'inférence fiduciaire) un élément de choix supplémentaire: la distribution initiale. La distribution initiale exprime une représentation des informations pertinentes de provenance étrangère aux données. Dans cette représentation, on peut chercher à incorporer toute connaissance, voire toute opinion, même très conjecturale ou "subjective", qu'on peut avoir sur le problème étudié. Mais, dans la perspective d'analyse inductive des données, on peut à l'inverse rechercher des distributions initiales visant à représenter un "état d'ignorance" sur les paramètres; la distribution finale correspondante pourra alors être interprétée comme exprimant l'apport propre aux données; on rejoint alors la perspective fiduciaire.

La recherche de critères susceptibles de formaliser l'ignorance est une entreprise redoutable à laquelle s'était attelée Jeffreys, et qui a été poursuivie par les statisticiens bayésiens actuels (cf notamment l'ouvrage de Box et Tiao déjà cité). Elle conduit à la notion de distributions initiales dites "non-informatives", lesquelles (comme on peut s'y attendre) sont des distributions très étalées (on les qualifie souvent de "vagues" ou "diffuses"). Du point de vue technique, les distributions finales issues de ces distributions initiales non-informatives peuvent être dérivées par des algorithmes fondés exclusivement sur le modèle d'échantillonnage et les données; techniquement, on rejoint donc également les procédures fiduciaires. Et ce n'est certes pas un hasard si, dans les situations élémentaires (en tout cas, pour l'inférence sur une moyenne, paradigme fondamental en Analyse des Comparaisons), les distributions finales obtenues à partir d'

initiales "non-informatives" coïncident avec les distributions fiduciaires. Bien entendu, il ne faut pas se bercer d'illusions: l'idée de distribution "formalisant l'ignorance" n'est sans doute pas plus "universelle" que la méthode fiduciaire de Fisher. Dans la construction faisant appel aux distributions "non-informatives", il faut avant tout, selon moi, voir une motivation, laquelle n'est autre que la motivation fiduciaire. C'est pourquoi, préférant à tout prendre le terme fiduciaire, plus mystérieux peut-être que celui de non-informatif, mais donc justement moins mystifiant, nous avons pris l'habitude de dénommer *fiducio-bayésiennes*, ou *bayésio-fiduciaires* (en anglais, nous disons *Bayes-fiducial*), les distributions finales (bayésiennes) dérivées à partir de distributions initiales non-informatives. En un mot: l'inférence fiducio-bayésienne, telle que nous l'avons développée en Analyse des Comparaisons, est fiduciaire par sa motivation et bayésienne par sa technique.

Dans la pratique, les distributions fiducio-bayésiennes fourniront des probabilités "à usage public" (comme disait Savage), essentielles pour la communication scientifique, et qui pourront parfaitement différer le cas échéant des probabilités ("personnelles") qu'on obtiendrait en incorporant des informations étrangères aux données traitées, telles que connaissances voire préjugés du chercheur, etc.

Rien n'empêche d'ailleurs de prolonger dans un deuxième temps les analyses fiducio-bayésiennes, en y incorporant de tels éléments; du point de vue technique, il se trouve que la distribution fiducio-bayésienne pourra alors servir d'*intermédiaire de calcul* utile pour procéder à ces nouvelles analyses.

La désirabilité méthodologique de l'approche bayésienne

Revenant à notre propos initial - remédier à l'insuffisance des tests de signification - voyons maintenant, en détaillant un peu, en quoi une distribution sur l'espace paramétrique, donc une distribution bayésienne (ou fiduciaire), permet des conclusions directement interprétables en termes des objectifs de la recherche.

Supposons que dans une recherche on s'intéresse à l'importance d'un certain effet (disons l'effet d'un facteur, ou encore l'effet d'interaction entre deux facteurs), relatif à une certaine demande d'analyse; et supposons que l'effet observé puisse être, du point de vue de la discipline concernée, réputé "négligeable"; ce que nous écrivons: $l < \epsilon$, en désignant

l'indice de l'importance de l'effet par l et une valeur "tout à fait négligeable" par ϵ . Dans ces conditions, souvent le chercheur posera la question inductive sous la forme suivante: quelle est la probabilité, compte tenu des données \mathbf{x} , que l'"effet parent" correspondant soit lui aussi négligeable? Soit, en désignant par λ (paramètre) cet effet parent, $P(\lambda < \epsilon | \mathbf{x}) = ?$.

Comme il a été dit, le test de signification F ne répond pas à cette question; alors que l'approche bayésienne, en construisant une distribution de probabilité sur l'espace des valeurs possibles pour λ , va permettre d'y répondre, dans les termes mêmes où la question a été posée. Selon que la probabilité trouvée est suffisamment élevée, ou non, on pourra considérer que la conclusion descriptive d'effet négligeable se trouve prolongée inférentiellement, ou non. Il convient de souligner que la deuxième de ces éventualités peut se produire alors même que l'effet observé est tout à fait négligeable, voire nul (donc avec un test F "parfaitement non-significatif"); il suffit pour cela que la précision expérimentale soit insuffisante: données trop peu nombreuses et/ou variances trop élevées.

On procédera de même - *mutatis mutandis* - dans la situation où un certain effet observé peut être réputé "notable", en cherchant alors à prolonger la conclusion descriptive d'effet notable.

Ainsi l'apport méthodologique des procédures bayésiennes conduira-t-il à bien dissocier les cas où une conclusion (comme celle d'effet négligeable) peut être effectivement prolongée à partir des données disponibles, et les cas où l'information expérimentale est insuffisante, et où par conséquent l'observateur doit *suspendre son jugement inductif*, sous peine que celui-ci ne repose pas sur des bases objectives suffisantes.

Une fois au clair sur la désirabilité d'intégrer l'approche bayésienne à l'Analyse des Comparaisons, il me reste à évoquer le deuxième point, celui de sa "*Faisabilité*". Pour élaborer un ensemble cohérent de procédures standard, applicables à des plans d'expérience diversifiés, et susceptibles de constituer le "pendant bayésien" des méthodes usuelles, un obstacle technique devait être surmonté: obstacle déjà présent dans le cadre traditionnel, mais encore plus redoutable dans le cadre bayésien, celui lié au modèle général de l'analyse de la variance traditionnelle, que je commencerai par mentionner.

Le dilemme du modèle général de l'analyse de la variance

Comme on sait, il est d'usage, en analyse de la variance traditionnelle,

de poser, au départ de toute analyse, un modèle, censé représenter la variation de la variable dépendante en fonction de toute la structure du plan: ce qu'on appelle le *modèle général* (on prend souvent un modèle linéaire, d'où l'appellation consacrée de "modèle linéaire général"). Les stipulations (on dit aussi les "spécifications") sur les paramètres du modèle général viseront à assurer la validité de toutes les inférences effectuées, donc (s'agissant des tests de signification traditionnels) de tous les tests F de la décomposition canonique. Mais quelles stipulations choisir? Souvent, pour des raisons de commodité, on pose des stipulations qui d'emblée réduisent fortement le nombre de paramètres; mais alors il suffit que l'une de ces stipulations soit peu réaliste pour semer le doute sur toutes les inférences effectuées. A l'opposé, on peut rechercher des stipulations aussi faibles que possible, suffisantes pour assurer la validité de toutes les inférences (démarche mise en oeuvre notamment dans Rouanet et Lépine, 1970, pour la structure de plan S*T); mais, plus les plans deviennent complexes, plus en tout état de cause les stipulations deviennent peu réalistes, plus le dilemme apparaît insurmontable.

Le dilemme s'aggrave encore lorsqu'on introduit la démarche bayésienne, puisqu'il faut alors choisir, en outre, une distribution initiale sur l'ensemble de tous les paramètres du modèle général. L'arbitraire risque alors de devenir total. Cet obstacle apparaît clairement dans l'ouvrage de Box et Tiao (déjà cité), précisément parce que les auteurs ont eu la vaillance de ne pas en rester à l'élégante simplicité des idées générales bayésiennes, mais ont cherché à pousser les analyses le plus loin possible. Or, pour les plans complexes abordés dans cet ouvrage, les développements techniques sont déjà particulièrement ardu, et ces plans sont encore bien simples par rapport à la plupart des plans usuels...

Cette prise de conscience nous a amenés à trancher le dilemme, en nous détournant du modèle général, et en nous engageant dans une nouvelle voie, celle de l'*inférence spécifique*.

La faisabilité de l'approche bayésienne: l'inférence spécifique

Dès l'article Rouanet et Lépine (1970), nous faisons la remarque suivante: si au lieu de chercher à assurer la validité de tous les tests F de la décomposition canonique, on s'intéresse seulement aux tests relatifs à certains effets particuliers, les simplifications peuvent être considérables; par exemple, dans un plan S*T, pour les comparaisons à un degré de

liberté, on peut constituer des rapports F (les rapports F' du programme VAR 3) qui ne requièrent plus aucune stipulation sur les variances et co-variances.

A partir de cette remarque, l'idée d'*inférence spécifique* devait se constituer peu à peu et faire son chemin. C'est dans Rouanet et Lecoutre (1983) qu'on en trouvera la présentation la plus détaillée; dans Rouanet (1977), Rouanet (1979) et Rouanet et Lépine (1977), l'idée apparaît déjà sous l'appellation d'"*inférence locale*" (au prix d'un élargissement du sens de "local"; la nouvelle terminologie permet de restituer au terme de local son sens premier, une inférence locale désignant désormais un cas particulier d'inférence spécifique, lorsque le protocole pertinent est obtenu par restriction des données initiales).

L'inférence spécifique n'est autre que le prolongement inférentiel des notions, mentionnées précédemment, de niveau d'analyse et de protocole pertinent. Elle consiste, pour chaque demande d'analyse, à fonder l'inférence sur un modèle posé, non pas au niveau du protocole de base, mais sur le protocole dérivé pertinent correspondant; modèle qu'on appellera un *modèle spécifique*. Il y aura donc autant de modèles spécifiques que de demandes d'analyse; mais le degré de complexité de chacun d'eux sera exactement celui du protocole dérivé correspondant. On voit dès lors que plus le plan d'ensemble est complexe, plus l'avantage de la démarche d'inférence spécifique, tant du point de vue de la simplicité des techniques que du réalisme des stipulations, sera décisif.

En particulier, pour une comparaison à un degré de liberté, la solution inférentielle sera purement et simplement *calculée* sur celle de l'inférence sur une moyenne. La distribution fiducio-bayésienne peut alors être obtenue directement à partir de l'effet observé et du rapport F relatif à cet effet (fourni par exemple par le programme VAR 3, cf Lecoutre, 1978). Cette importante propriété, signalée dès 1977 par B. Lecoutre (et que ce-lui-ci devait ultérieurement étendre à toute comparaison, quel que soit son nombre de degrés de liberté) marque le rattachement définitif de l'inférence fiducio-bayésienne à l'Analyse des Comparaisons, mettant un point final à la "deuxième époque" de celle-ci.

* EN GISE DE CONCLUSION: STATISTIQUE BAYÉSIENNE ET STATISTIQUE TRADITIONNELLE; UN NOUVEAU PARADIGME?

méthodologiques et techniques, mais non pas idéologiques, qu'ont été élaborées les extensions fiducio-bayésiennes de l'Analyse des Comparaisons; et c'est également ainsi, il me semble, qu'elles sont "vécues" par ceux qui désormais les utilisent. Mettre en oeuvre des méthodes bayésiennes, loin d'impliquer le rejet des méthodes habituelles, marque tout simplement la volonté d'en enrichir la panoplie, en les prolongeant par des procédures mieux adaptées et plus puissantes.

Mais, dans les milieux de la statistique académique, on aime bien opposer, de façon exclusive et exhaustive, inférence bayésienne et inférence traditionnelle, cette dernière étant volontiers parée du titre de "classique"; tout ce qui est bayésien n'est point "classique", et vice versa, la pierre de touche étant la construction de distributions sur l'espace paramétrique. Dans cette optique, l'usage des méthodes fiducio-bayésiennes ferait plutôt figure de "nouveau paradigme" (au sens de Kuhn, cela va de soi), venant supplanter, plutôt que compléter, les méthodes habituelles.

Il est bien vrai que, dans le sens suivant, on peut dire que le point de vue bayésien domine le point de vue "classique": toute procédure "classique" peut être réinterprétée dans le cadre bayésien, mais non l'inverse. Ainsi, pour les procédures usuelles non élémentaires (comparaisons à plusieurs degrés de liberté, cf Lecoutre, 1984), les procédures bayésiennes, plus satisfaisantes méthodologiquement, ne peuvent pas être "récupérées" dans le cadre "classique".

Dependant, à mon avis, face à un problème aussi grave que l'induction, le manichéisme n'est pas de mise; aucune voie d'approche ne devrait être rejetée dans les ténébres. Or le manichéisme amène: à réifier le statut de la notion de paramètre, dont l'essence est des plus subtiles qui soit; à "scotomiser" l'approche fiduciaire; à oublier que la construction de distributions sur l'espace paramétrique n'est vraiment taboue que dans un avatar particulier de l'approche "classique" (la doctrine de Neyman et Pearson). Sans remonter à Laplace, relisons l'article princeps de Student de 1908, où l'auteur proposait la procédure (destinée à un si brillant avenir) du t pour comparer deux moyennes, et demandons-nous si, dans cet article, Student était (plutôt) "classique", ou fiduciaire, ou bayésien; bien fin qui pourrait répondre à pareille question!

Alors, "nouveau paradigme" ou "prolongement des méthodes habituelles par d'autres moyens"? Je laisserai aux utilisateurs le soin de conclure.

CE QU'EST EN BREF L'ANALYSE DES COMPARAISONS

Peut-être tout ce qui précède aura-t-il paru à la fois allusif et touffu; essayons maintenant de rassembler les idées essentielles. L'analyse des Comparaisons, ainsi nommée parce que la notion formalisée de comparaison y joue un rôle central, est une méthode d'analyse inductive des données structurées; elle s'articule autour des deux axes principaux suivants.

(1) Formalisation algébrique: structuration des données et planification des analyses - La structuration des données, qui peut précéder ou suivre le recueil des données, conduit à un ou plusieurs plans d'analyse. Une structure de plan privilégiée est celle de plan "quasi-complet", qui s'exprime au moyen d'une formule de plan. Les questions que le chercheur se pose à propos de ses données, dans le cadre d'un plan d'analyse déterminé, conduiront à la *planification des analyses*, chaque "demande d'analyse" désignant une comparaison (au sens de la formalisation algébrique).

(2) Analyse inductive: procédures fiducio-bayésiennes et inférence spécifique - Pour chacune des demandes d'analyse, les tests de signification traditionnels, tels que les tests F , seront relayés par des procédures *fiducio-bayésiennes*, qui permettent de statuer sur l'importance (et non seulement sur l'existence) des effets examinés, au niveau d'une population dont les données sont censées constituer un échantillon. La démarche d'*inférence spécifique*, en s'ancrant sur la structuration des données, fournit des procédures standard, claires à justifier et commodes à mettre en oeuvre.

• Pour *situer* en quelques mots l'Analyse des Comparaisons par rapport aux méthodes statistiques "usuelles", on retiendra les deux points suivants. D'un côté l'Analyse des Comparaisons *prolonge l'analyse de la variance*, en permettant une meilleure intégration des procédures statistiques à la démarche du chercheur; mais la construction est de plus en plus autonome par rapport aux développements de l'analyse de la variance à l'anglo-saxonne. D'un autre côté l'Analyse des Comparaisons présente des parentés techniques et structurelles avec d'autres méthodes d'analyse des données, surtout l'*Analyse des Correspondances*, avec laquelle, lorsque les données s'y prêtent (données multivariées par exemple), elle peut être utilement combinée.

• Deux remarques enfin. (1) L'Analyse des Comparaisons est tout le

contraire d'une méthode aveugle. Une procédure standard n'est pas une recette-miracle. A tous les moments de la démarche, de la structuration des données à l'interprétation des résultats inférentiels, en passant par l'étape cruciale de la planification des analyses, les connaissances préalables et les hypothèses du chercheur pourront être mises à contribution et à profit. (2) Les principes qui ont servi à fonder la construction de l'Analyse des Comparaisons présentent un caractère raisonnable, naturel. Mais on se gardera d'attribuer à ces principes un caractère d'évidences premières, dont découlerait une méthode "universelle". En réalité, les divers principes se soutiennent mutuellement, à la façon des pièces d'un échiquier. Ainsi, c'est grâce à l'inférence spécifique que les méthodes bayésiennes peuvent être opérationnalisées dans le cadre de la structuration des données; mais à l'inverse, c'est le cadre bayésien qui fournit la formalisation la plus satisfaisante de la notion d'inférence spécifique, etc.

*

*

*

OU EN SOMMES-NOUS MAINTENANT?

• Les développements de l'Analyse des Comparaisons, au cours de ce qu'on pourrait appeler la "troisième époque" ("contemporaine": de 1979 à nos jours) se poursuivent activement, désormais autour du noyau que constitue le *Groupe Mathématiques et Psychologie* de l'Université René Descartes. Les deux thèses de 1980, de V. Duquenne et B. Lecoutre, ont jalonné les deux lignes de front respectives: structuration des données et inférence statistique. Parmi les récents développements, je mentionnerai les extensions multivariées, l'analyse de la covariance, les plans à plusieurs facteurs de groupe, les comparaisons de fréquences; également l'investigation d'autres points de vue inférentiels: inférence prédictive, inférence ensembliste, etc.

Parallèlement, les méthodes d'Analyse des Comparaisons sont maintenant largement diffusées dans la communauté des chercheurs qui utilisent la méthode expérimentale, tant au laboratoire que sur le terrain. Le programme VAR 3, implanté dans bon nombre de centres de calcul, aura constitué, bien souvent, l'instrument efficace de cette diffusion.

Rançon du succès, la demande s'accroît de textes pédagogiques couvrant l'Analyse des Comparaisons dans son ensemble, et adaptés à des besoins théoriques et pratiques divers. Des textes introductifs, de niveau élémentaire, sont désormais disponibles (voir notamment Hoc, 1983). Tout porte à croire que ces textes, en élargissant encore l'audience de l'Analyse des Comparaisons, vont accentuer la demande qui nous fut adressée naguère (peut-être quelque peu prématurément) d'un ouvrage de "référence" satisfaisant à toutes les exigences contradictoires bien connues: contenir toutes les idées essentielles et les procédures pratiques dans un format aussi réduit que possible, être d'un niveau très accessible tout en restant parfaitement rigoureux, etc.

• Nul n'était mieux préparé pour relever le défi que Bruno Lecoutre, docteur de troisième cycle à la fois en psychologie et en mathématiques, qui a participé à l'élaboration des concepts fondamentaux de l'Analyse des Comparaisons, et dont la contribution aux développements actuels est prépondérante. L'ouvrage qu'il propose constitue, sans l'ombre d'un doute, la monographie attendue. Son contenu couvre à peu près le champ des situations auxquelles s'applique traditionnellement l'analyse de la variance classique, et il met à pied d'oeuvre pour aborder toutes les extensions récentes.

→→→ 1 DE L'ANALYSE DE LA VARIANCE CLASSIQUE...

Par "analyse de la variance classique", on entendra ici l'ensemble des méthodes conçues par R.A. Fisher pour l'analyse des données expérimentales. Ces méthodes furent rapidement développées par Fisher et ses contemporains, avec le souci de préserver l'équilibre entre l'élaboration des procédures et la spécificité de la problématique expérimentale; il suffira ici d'évoquer quelques grands textes comme "Statistical Methods for Research Workers" et "The Design of Experiments" de Fisher lui-même (dont les premières éditions respectives sont de 1925 et 1935), ainsi que "Experimental Designs" de Cochran et Cox (première édition en 1950).

Par la suite, cet ensemble de méthodes, repris dans le cadre de la statistique mathématique orthodoxe, devait donner lieu à une construction très élaborée du point de vue formel, mais qui, sur le plan conceptuel, réduisait la spécificité de la problématique expérimentale à sa plus simple expression; parmi les nombreux textes exposant cette construction, nous nous contenterons ici de mentionner le livre de Scheffé, "The Analysis of Variance" (1956).

1.1 Les apports de l'analyse de la variance classique

Commençons par résumer en quelques lignes les caractéristiques essentielles d'une analyse de la variance classique.

- Etant donné un plan d'expérience, l'analyse lui associe une décomposition particulière, "standard", selon les sources de variation canoniquement associées au plan: effets globaux des différents facteurs expérimentaux, effets d'interaction, effets résiduels, etc. A chaque source de variation, on associe une statistique "somme-des-carrés", un nombre de degrés de liberté et une autre statistique "carré-moyen" (rapport de la somme-des-carrés au nombre de degrés de liberté).

- Pour chaque source de variation dont on examine l'effet, on constitue le "rapport F ", rapport du carré-moyen associé à la source de variation examinée à un autre carré-moyen, correspondant à une autre source de variation (source "adjointe"), susceptible de servir de "terme de référence".

- Ce rapport F est traditionnellement utilisé pour procéder à un test de signification: si sa valeur est suffisamment élevée, le résultat du test est "significatif" (à un seuil conventionnel usuel) et on conclut inférentiellement à un effet de la source de variation examinée.

L'analyse de la variance classique présente indéniablement des apports positifs, en fournissant des réponses élaborées, théoriques et pratiques, à certaines des préoccupations de l'expérimentateur :

- La prise en compte explicite du plan d'expérience, qui permet de pouvoir examiner les effets de plusieurs facteurs variant simultanément;
- L'élaboration d'un résumé de l'analyse, constitué par le traditionnel "tableau de l'analyse de la variance", qui fournit une synthèse des résultats;
- La réponse à la visée inductive, c'est-à-dire généralisante, apportée par les procédures inférentielles.

1.2 Les insuffisances de l'analyse de la variance classique

Mais l'analyse de la variance classique apparaît également insuffisante, en raison du décalage que l'on constate entre les réponses qu'elle apporte et les objectifs réels de l'analyse des données expérimentales.

(1) D'abord elle ne prend pas directement et expressément en considération les questions de l'expérimentateur. Dès lors, si ces questions sont "fines" (par exemple, il s'agit d'examiner l'effet d'un facteur conditionnellement à un autre facteur, ou il s'agit d'examiner un schéma de régression, etc.), ou encore si le plan d'expérience est un peu complexe, la décomposition "standard" risque d'être en réalité peu adaptée aux questions de l'expérimentateur. Quant au recours à des "analyses complémentaires" - pratique qui s'est largement répandue - il est bien clair que la prolifération de ces analyses, juxtaposées à une analyse "standard" inadaptée, ne saurait non plus constituer une solution pleinement satisfaisante.

(2) Ensuite l'analyse de la variance classique ne fournit pas de *procédures descriptives effectives* directement exploitables. Si les statistiques descriptives qu'elle considère (sommés-des-carrés et carrés-moyens) reflètent bien, d'une certaine manière, l'importance de l'effet observé, elles ne peuvent cependant être utilisées telles quelles comme *critères d'appréciation* de cette importance; la raison en est que leur valeur dépend des effectifs, ce qui rend pour le moins problématique toute tentative d'appréciation. Bien plus, peu d'utilisateurs sont sans doute à même d'explicitier le lien entre les statistiques qui paraissent naturellement pertinentes (par exemple, une différence de moyennes, la pente d'une droite de régression...) et les statistiques de l'analyse de la variance. Le fait que cette dernière soit avant tout considérée comme une méthode inférentielle ne saurait pour autant justifier un tel décalage.

(3) Enfin il y a une coupure radicale entre la nature des questions que peut se poser l'expérimentateur - "l'effet est-il important?", "l'effet est-

il présent chez la plupart des sujets?", etc. - et le verdict brutal fourni par l'analyse: "significatif" ou "non-significatif". Ici la raison réside dans le fait que l'on utilise les statistiques de l'analyse de la variance pour procéder à des tests de *signification*. Or, de façon générale, le rapport F , en tant que *statistique de test*, permet de mettre à l'épreuve l'hypothèse nulle selon laquelle l'effet "théorique" (on dira encore, suivant les circonstances, effet vrai, effet parent, effet dans la population) est nul. Mais ceci ne nous renseigne que sur l'existence de l'effet, et non sur son *importance*: un résultat significatif indique que l'existence de l'effet est bien établie, ce qui n'implique évidemment pas la conclusion tout autre que cet effet est important; quant à un résultat non-significatif, il n'est en principe qu'un constat d'ignorance et ne permet pas de conclure à la non-existence de l'effet, ni même à l'existence d'un effet négligeable. Par ailleurs le test de signification ne nous renseigne que sur l'effet moyen. Enfin il ne permet pas de prendre éventuellement en considération des éléments d'information *extérieurs* aux données.

→→→ 2 ... A L'ANALYSE BAYESIENNE DES COMPARAISONS

A l'examen, les différences insuffisances de l'analyse de la variance classique n'apparaissent pourtant pas constituer des défauts irrémédiables; il apparaît au contraire tout à fait possible de remédier à ces insuffisances, en étendant la méthode dans de nouvelles directions.

Pour cela, il convient d'abord de surmonter un certain nombre de difficultés qui surgissent dès que l'on cherche à approfondir l'approche traditionnelle: d'abord la complexité des plans d'analyse ressemble à un véritable dédale, dans lequel on ne chemine qu'au prix de complications extrêmes; ensuite l'exposé des procédures, s'appuyant sur l'utilisation du calcul matriciel, masque très souvent les structures mathématiques sous-jacentes; enfin, en ce qui concerne plus particulièrement la portée de la méthode, les développements soit (comme nous l'avons dit) se limitent à la conception traditionnelle des tests de signification soit, dans le cadre bayésien, apparaissent d'une complexité assez rebutante dès qu'il s'agit de dépasser les cas les plus élémentaires.

Le remède à ces difficultés réside dans le recours explicite à la *formalisation algébrique*, qui permet de dégager et d'explicitier les structures mathématiques fondamentales et, en conséquence, de réduire d'une manière considérable la diversité des cas. Si, à la formalisation abstraite, on ajoute un principe essentiel, le principe d'*inférence spécifique*, on parvient tout simplement au résultat que, dans chaque cas, les solutions vont pouvoir être

caiguées sur les solutions du problème archi-classique de l'inférence sur une moyenne.

Cette nouvelle approche de l'analyse de la variance conduit à l'Analyse Bayésienne des Comparaisons. A la base de l'Analyse Bayésienne des Comparaisons, se trouvent les notions formalisées de *Plan d'analyse* (structures ensemblistes) et de *comparaison* (structures linéaires), issues des travaux de Rouanet et Lépine (cf Rouanet et Lépine, 1977); le principe d'inférence spécifique, conjugué avec cette formalisation, conduit à des *procédures bayésiennes standard*, faciles à mettre en oeuvre dans une large classe de situations.

Nous allons maintenant préciser quels sont les choix conceptuels essentiels de l'Analyse Bayésienne des Comparaisons, et quelles solutions en découlent.

2.1 Des questions de l'expérimentateur à la planification des analyses spécifiques

Dans l'Analyse Bayésienne des Comparaisons, ce sont les questions que se pose l'expérimentateur à propos de ses données qui constituent le point de départ de l'analyse: chacune de ces questions est regardée comme une *demande d'analyse spécifique* (analyse spécifique s'opposant ici à l'analyse générale que constituerait la décomposition standard). Cette demande d'analyse sera rendue "opérationnelle" en lui associant, dans le cadre du plan d'analyse, une ou plusieurs comparaisons.

(Le terme comparaison est pris dans son sens technique, mais on pourra l'entendre, de manière naturelle, comme une formalisation du sens intuitif, tel qu'il apparaît dans l'expression "comparaison de moyennes"; un autre point de vue est de regarder la notion formalisée de comparaison comme une extension de la notion de "source de variation" utilisée dans l'analyse de la variance)

Par suite, l'Analyse Bayésienne des Comparaisons permet que chaque question de l'expérimentateur soit examinée d'une façon aussi précise que possible, à partir de la *planification des analyses spécifiques* que constitue l'ensemble des comparaisons retenues.

Ainsi, l'Analyse Bayésienne des Comparaisons s'oppose à l'idée d'analyse "aveugle", qui ne dépendrait que de critères formels, et pourrait être exécutée de manière totalement automatique; au contraire la planification des demandes d'analyses spécifiques est considérée comme une partie intégrante de la démarche d'analyse des données et sera donc, sous la responsabilité de l'utilisateur, une *étape essentielle* de l'analyse.

Dans notre optique, les questions, qui conduisent aux demandes d'analyses spécifiques, sont des interrogations sur "ce que les données ont à dire"; ces interrogations ne sauraient revêtir une forme standard, mais au contraire s'organiseront, en fonction des objectifs de l'expérience, des hypothèses

éventuelles, de la nature des facteurs expérimentaux, des hiérarchies et des relations entre ces facteurs, etc. (en fait de tout ce qui fait l'originalité et l'intérêt des données structurées). Dès qu'une expérience est un tant soit peu complexe, on se posera à la fois, sur quelques points bien déterminés, des *questions précises*, et, par ailleurs, des *ensembles d'interrogations* plus vagues qu'il conviendra donc de planifier. A ces deux types de demandes, correspondront en général des objectifs un peu différents: dans le premier cas, il s'agira d'obtenir des réponses ponctuelles, précises, notamment (mais pas seulement) vis-à-vis d'une certaine hypothèse; alors que, dans le second cas, il s'agira plutôt de rechercher une représentation synthétique des données (notamment en l'absence de toute hypothèse).

2.2 Le rôle primordial des procédures descriptives

Un expérimentateur, décrivant ses données, prend naturellement en considération le caractère notable ou négligeable des effets qu'il observe, la stabilité ou la non stabilité de ces effets à l'intérieur de l'expérience (en psychologie: le problème des différences individuelles), la répétabilité ou la non répétabilité de ces effets vis-à-vis d'expériences antérieures, etc. Ce sont donc tous ces aspects qu'il convient de prendre en compte, dans les procédures descriptives qui, dans l'Analyse Bayésienne des Comparaisons, tiennent un rôle primordial.

Pour cela, il s'agira de caractériser numériquement l'effet observé associé à chaque comparaison analysée, à partir de statistiques élémentaires (moyennes, écarts-types...).

Un cas naturellement privilégié est celui de l'effet associé à un contraste entre moyennes; on peut alors caractériser numériquement l'effet de manière naturelle: par exemple, l'effet sera une différence de moyennes, une différence de différences de moyennes, la pente d'une droite de régression... On se ramène généralement à ce cas quand la comparaison analysée est à un seul degré de liberté.

Par contre, pour une comparaison à plusieurs degrés de liberté, la caractérisation numérique de l'effet ne pourra évidemment pas représenter l'effet (qui est alors multidimensionnel), mais permettra de traduire la grandeur de l'effet.

Cette caractérisation de l'effet observé constitue un aspect fondamental: d'une part elle fournit des procédures descriptives effectives, permettant d'apporter (au niveau descriptif) des réponses précises pour chaque comparaison analysée; d'autre part, en dégageant les données pertinentes pour cette comparaison, elle va préparer la mise en oeuvre directe des procédures

inférentielles, conçues comme un prolongement inductif, le plus naturel possible, des procédures descriptives.

2.3 Un principe essentiel: l'inférence spécifique

Intuitivement, l'idée d'inférence spécifique pour une comparaison consiste à traiter simplement les données pertinentes pour cette comparaison (et obtenues dans l'analyse descriptive); l'inférence spécifique sera seulement relative à l'effet associé à la comparaison analysée et portera sur l'effet théorique, caractérisé comme l'effet observé, mais cette fois à partir de valeurs théoriques (moyennes, écarts-types...) qui, dans le modèle statistique, auront le statut de paramètres.

Le principe d'inférence spécifique s'oppose donc à l'idée d'effectuer une inférence simultanée sur tous les paramètres d'un modèle général, relatif à un corps de données considéré comme une même "unité expérimentale": même lorsqu'une telle inférence simultanée est techniquement envisageable, elle apparaît souvent largement arbitraire, dès lors qu'il faut, premièrement expliciter un modèle général pour un plan un tant soit peu complexe - on pense-ra ici au fameux "General Linear Model" souvent posé au début des analyses classiques - et, deuxièmement, dans le cadre bayésien, choisir une distribution initiale relative à tous les paramètres de ce modèle.

Au contraire, une inférence spécifique, pour chaque comparaison analysée, aura souvent un caractère raisonnable dans les situations courantes d'analyse de données expérimentales; ceci d'autant plus qu'elle reposera sur une *structure statistique spécifique*, elle-même obtenue sous un modèle spécifique (relatif aux données pertinentes), mettant en jeu un petit nombre de paramètres et beaucoup plus réaliste qu'un modèle général.

2.4 Le cadre bayésien et la place prépondérante accordée aux procédures fiducio-bayésiennes

On adoptera le cadre bayésien, en raison de sa souplesse à formaliser les différentes situations qui peuvent se rencontrer. On sait que les méthodes bayésiennes font intervenir explicitement un élément extérieur aux données à analyser, à savoir une *distribution de probabilité initiale* sur les valeurs possibles du (ou des) paramètre; du modèle d'échantillonnage et de cette distribution initiale, on déduit, par le *théorème de Bayes*, une *distribution de probabilité finale* (ou *révisée*) sur les valeurs possibles du paramètre. Cette distribution finale permet de traduire, par un *jugement probabiliste*, notre incertitude sur la valeur vraie du paramètre; elle permet également de faire une prédiction (probabiliste) relative à de nouvelles

observations, en en déduisant une *distribution prédictive* relative à une statistique pertinente.

Dans l'Analyse Bayésienne des Comparaisons, il s'agit en fait de proposer une *voie intermédiaire* entre, d'une part le test de signification et ses insuffisances conceptuelles, et d'autre part une certaine conception bayésienne, subjective à l'extrême, selon laquelle on devrait effectivement tenir compte, dans la distribution initiale, de toutes les informations possibles et imaginables, y compris bien sûr celles étrangères aux données à analyser, même provenant d'opinions personnelles, de croyances "a priori".

Dans cette optique le principe d'inférence spécifique a évidemment un rôle essentiel: il introduit explicitement une sélection raisonnée des données et des paramètres sur lesquels sera basée chacune des inférences spécifiques, donc un choix des informations jugées pertinentes pour les données.

Ce premier choix est complété, en accordant une place prépondérante aux procédures *fiducio-bayésiennes*: celles-ci peuvent être regardées comme exprimant l'information apportée par les données, en laissant de côté toute information extérieure à ces données. On sait que ces procédures ont été conçues pour chercher à exprimer un état initial d'ignorance vis-à-vis des paramètres. Ceci peut bien entendu être obtenu dans le cadre bayésien, en choisissant une distribution initiale visant à traduire explicitement un état d'ignorance, une telle distribution ainsi que les procédures sous-jacentes (cf notamment Jeffreys, 1961) étant souvent qualifiées de "*non-informatives*". Mais il nous paraît également important d'accorder un intérêt tout particulier aux méthodes *fiduciaires* qui, techniquement, ne font pas intervenir d'élément extérieur aux données (hormis le modèle d'échantillonnage): la distribution fiduciaire est obtenue par un argument direct, l'argument du "*pivot*" (cf notamment Fisher, 1956), à partir du modèle d'échantillonnage; ces méthodes reviennent cependant implicitement à se placer dans un état d'ignorance initial vis-à-vis du (ou des) paramètre.

Nous n'aborderons pas ici la question de savoir si, *conceptuellement*, les méthodes fiduciaires doivent être ramenées à la problématique bayésienne. Nous nous contenterons de remarquer que, dans les situations courantes d'analyse de données expérimentales considérées ici, procédures fiduciaires et procédures bayésiennes non-informatives aboutissent au même résultat; c'est pourquoi, du point de vue *technique*, nous les qualifions indifféremment de procédures *fiducio-bayésiennes* (on dit encore bayésio-fiduciaires).

En accord avec les considérations précédentes, les méthodes bayésiennes qui seront privilégiées dans l'Analyse Bayésienne des Comparaisons seront:

- en tout premier lieu celles qui conduisent aux procédures fiducio-

bayésiennes (donc qui englobent les procédures fiduciaires);

- ensuite celles dans lesquelles la distribution initiale est une distribution du même type que la distribution fiduciaire-bayésienne (la distribution finale est encore une distribution du même type); en pratique, il sera éclairant de regarder cette contrainte sur le choix de la distribution initiale comme l'expression du fait que cette distribution représente une information équivalente à celle qui serait apportée par une certaine expérience.

2.5 Du test de signification aux procédures bayésiennes

Le choix parmi les différentes procédures inférentielles (test de signification, procédures fiduciaire-bayésiennes, procédures bayésiennes au sens strict) revient en fait au choix d'un critère d'évaluation de l'effet théorique associé à la comparaison analysée.

Le test de signification: un intermédiaire - Le test de signification fournit un premier critère d'évaluation, permettant de se prononcer sur l'existence de l'effet. Dans l'esprit de l'Analyse Bayésienne des Comparaisons, le test de signification n'est pas nécessairement à rejeter (ou à ignorer), mais il n'aura qu'un rôle d'intermédiaire:

- intermédiaire conceptuel, le test correspondra à un premier examen, rapide, grossier, préalable à une analyse approfondie à laquelle il pourra servir de point de départ;

- intermédiaire technique, la valeur de la statistique de test sera utilisée comme intermédiaire de calcul pour les procédures fiduciaire-bayésiennes.

Les procédures fiduciaire-bayésiennes: une référence indispensable - Les procédures fiduciaire-bayésiennes constituent un second critère d'évaluation, permettant de se prononcer sur l'importance de l'effet, à partir de la seule information apportée par les données. Elles constituent une référence indispensable, en traduisant "ce que les données ont à dire". Elles constituent un moyen de communication des résultats, à la fois synthétique et objectif, pouvant s'appuyer sur des figures des distributions ou sur des énoncés de probabilité résumant des aspects jugés essentiels: notamment relatifs au caractère négligeable ou au contraire notable d'un effet, ou encore permettant d'apprécier la stabilité de l'effet dans la population.

Les procédures bayésiennes: complémentaires - Les procédures bayésiennes auront un rôle complémentaire. Si un certain type d'information peut être considéré comme équivalent à une information qui serait fournie par une expérience, ce type d'information pourra lui-même être traduit par une distribution

fiduciaire-bayésienne; on pensera plus particulièrement au cas de l'information apportée par une autre expérience déjà réalisée, ou encore au cas de l'information "potentielle" qu'apporterait une expérience ultérieure. On peut alors utiliser cette distribution comme distribution initiale pour les procédures bayésiennes; la distribution finale permet alors d'apprécier dans quelle mesure l'information supplémentaire modifie la distribution fiduciaire-bayésienne et remet éventuellement en cause les conclusions.

→→ 3 CONTENU DE L'OUVRAGE

Cet ouvrage a pour but de fournir des méthodes "standard", de mise en oeuvre relativement simple, en exposant les bases théoriques et pratiques de ces méthodes; il est orienté vers une application effective des procédures, plutôt que vers des développements théoriques couvrant un champ très vaste, mais de mise en oeuvre moins immédiate.

Ces objectifs nous ont conduit à restreindre le contenu de cet ouvrage à l'analyse de données univariées, numériques, analysées suivant un plan dont un seul facteur est traité comme un facteur de groupe (ou facteur aléatoire, comme on dit encore dans la formulation probabiliste); en gros le champ des situations couvert sera donc celui pour lequel est habituellement proposée l'analyse de la variance univariée ("ANOVA").

L'Analyse Bayésienne des Comparaisons, telle quelle est présentée dans cet ouvrage, constituera une introduction à un champ de recherche plus large, que l'on peut appeler l'Analyse des Comparaisons (en général), ou encore l'Analyse des Données Structurées, en entendant par ce dernier terme aussi bien les données d'expérience au sens strict que les données d'observation systématique. Un aperçu des développements actuels de ces travaux est fourni par la "Bibliographie sélectionnée sur l'Analyse des Comparaisons" qu'on trouvera à la fin de l'ouvrage. Parmi les thèmes traités, beaucoup sont directement reliés au contenu du présent ouvrage; celui-ci permettra donc d'aborder un certain nombre de travaux qui conduisent à des procédures effectives pour des situations non traitées ici. Nous citerons notamment les recherches portant sur:

- l'analyse des plans à structure complexe;
- l'analyse des plans à deux facteurs de groupe;
- l'analyse de données multivariées;
- l'analyse de la covariance;
- l'analyse de données à espace d'observation amorphe.

Compte tenu des orientations précédentes, l'ouvrage a été organisé en

deux parties distinctes, la première, *théorique*, exposant les justifications formelles des méthodes, la seconde, *pratique*, illustrant la mise en oeuvre effective de ces méthodes à partir d'un exemple concret traité de manière détaillée. Ces deux parties ont été rédigées de manière à être à la fois :

- autonomes, elles peuvent être étudiées de manière indépendante;
- complémentaires, leur rapprochement est bien entendu nécessaire pour parvenir à la maîtrise des méthodes.

3.1 Première partie: approche théorique

La première partie, constituée des chapitres I à IV, fournit l'*approche théorique de l'Analyse Bayésienne des Comparaisons*.

Le chapitre I expose les bases de la formalisation algébrique. La formalisation ensembliste, en donnant des définitions rigoureuses des notions classiques de facteurs et de plans, conduit à caractériser la classe des plans à laquelle s'appliqueront les méthodes exposées dans cet ouvrage. La formalisation linéaire, en dégagant les structures mathématiques en jeu dans l'analyse de la variance, permet de formaliser la notion centrale de comparaison, ainsi que les notions qui lui sont liées, contrastes, sommes-des-carrés notamment; elle permet également des définitions formelles des différents types de comparaisons: comparaison inter, comparaison intra, comparaison conditionnelle, comparaison d'interaction, etc. On aborde également dans ce chapitre I le problème de la caractérisation numérique de l'effet observé associé à une comparaison.

Le chapitre II présente les distributions particulières qui interviennent dans les procédures inférentielles. Toutes ces distributions sont caractérisées à partir de la distribution normale multidimensionnelle; on retrouve bien entendu les distributions usuelles en jeu dans les tests de signification classiques, *chi-deux*, *t* de Student, *F* de Fisher-Snedecor, et on introduit de nouvelles distributions qui interviendront dans les procédures fiducio-bayésiennes et bayésiennes. En raison de son caractère particulier, ce chapitre pourra, en première lecture, être traité de manière rapide (voire en grande partie omis); il sera plutôt regardé comme un complément à l'étude des procédures inférentielles qui interviendra au chapitre suivant.

Le chapitre III expose les fondements des méthodes inférentielles de l'Analyse Bayésienne des Comparaisons. La base de ces méthodes est le principe d'inférence spécifique, exposé dans la première partie du chapitre. La recherche des solutions inférentielles est alors ramenée à l'étude d'une structure statistique remarquable, la structure "multinormale-*chi-deux*", à partir

de laquelle on obtient toutes les procédures inférentielles envisagées dans cet ouvrage.

Le chapitre IV constitue une étude détaillée des modèles d'échantillonnage, pour la classe de plans considérée. Le modèle d'échantillonnage pour l'analyse d'une comparaison est un modèle spécifique, dans la mesure où il est spécifié au niveau des données pertinentes pour cette comparaison; le lien avec les méthodes classiques est assuré par le fait que ce modèle est l'un des modèles de base, normal ou multinormal.

3.2 Deuxième partie: approche pratique

La deuxième partie de l'ouvrage, constituée des chapitres V et VI, fournit l'*approche pratique de l'Analyse Bayésienne des Comparaisons*.

Il s'agit, à partir d'un exemple concret, emprunté à la psychologie expérimentale (mais ne mettant en jeu aucune "connaissance de spécialiste"), d'illustrer les procédures de l'Analyse Bayésienne des Comparaisons et leurs implications méthodologiques.

Dans ce but, il est fait le plus possible appel au caractère naturel des procédures, d'une part en mettant en évidence, pour chaque comparaison analysée, les dérivations pertinentes sur les données (traduisant les structures algébriques), d'autre part en privilégiant le rôle des statistiques élémentaires usuelles, moyenne et écart-type-corrigé (clairement interprétables), à partir desquelles tous les calculs peuvent être effectués. C'est ainsi que tous les résultats numériques présentés ici ont été effectivement obtenus avec une calculatrice programmable, sans qu'il fût nécessaire de recourir à un programme général (en dehors des calculs de moyennes et d'écart-types, seuls de petits programmes complémentaires, permettant d'automatiser les calculs répétitifs, ont été utilisés).

Le lien avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance - sommes-des-carrés, carrés-moyens, rapports *F* - n'est pas pour autant négligé et ce lien est, dans chaque cas, explicitement dégagé. Ceci permet également (notamment pour de gros ensembles de données) de recourir à des programmes informatiques généraux, conçus dans une ligne plus traditionnelle. C'est ainsi qu'en ce qui concerne l'analyse descriptive, les résultats présentés ici ont pu être retrouvés (et vérifiés...) à l'aide du programme VAR3 de Lépine, Rouanet, Lebeaux, 1976 (cf Rouanet et Lépine, 1977, pour une introduction à ce programme).

Le chapitre V expose les procédures de base (procédures fiducio-bayésiennes pour l'inférence sur l'effet d'un contraste). Ces procédures couvrent

Si tu marchais en plaine, que tu aies la volonté d'avancer, et que pourtant tu recules en arrière, alors il y aurait de quoi désespérer; mais puisque tu escalades une pente abrupte, aussi abrupte que tu le sembles toi-même à qui te voit d'en bas, les rechutes en arrière ne peuvent avoir d'autres causes que la nature du terrain, et tu ne dois pas désespérer.

Frank Kafka, "Journal Intime"

CHAPITRE I

*

LA FORMALISATION ALGÈBRE

1.1.1 Définition 1.1.1.1. Soit X un ensemble. Une relation d'équivalence \sim sur X est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive. L'ensemble des classes d'équivalence de X par rapport à \sim est noté X/\sim . On appelle quotient de X par rapport à \sim l'ensemble X/\sim . Soit $f: X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est constante sur les classes d'équivalence de \sim si et seulement si $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$. Dans ce cas, on définit l'application $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ par $\bar{f}(x/\sim) = f(x)$. On a alors $f = \bar{f} \circ \pi$, où $\pi: X \rightarrow X/\sim$ est l'application canonique de projection.

1.1.2 Théorème 1.1.2.1. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application. On a f constante sur les classes d'équivalence de \sim si et seulement si il existe une unique application $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$.

1.1.3 Définition 1.1.3.1. Soit X un ensemble. Une relation d'équivalence \sim sur X est dite compatible avec une structure algébrique (X, \cdot) si et seulement si $x \sim x' \implies x \cdot y \sim x' \cdot y$ et $x \cdot y \sim x \cdot y'$ pour tout $x, x', y, y' \in X$. On appelle quotient algébrique de (X, \cdot) par rapport à \sim l'ensemble $(X/\sim, \cdot)$ où \cdot est définie par $(x/\sim) \cdot (y/\sim) = (x \cdot y)/\sim$. On a alors $\bar{\cdot}: (X/\sim, \cdot) \rightarrow (X/\sim, \cdot)$ est l'application canonique de projection.

1.1.4 Théorème 1.1.4.1. Soit (X, \cdot) un ensemble muni d'une structure algébrique et \sim une relation d'équivalence compatible avec \cdot . Soit $f: (X, \cdot) \rightarrow (Y, \cdot)$ une application compatible avec \cdot . On a f constante sur les classes d'équivalence de \sim si et seulement si il existe une unique application $\bar{f}: (X/\sim, \cdot) \rightarrow (Y, \cdot)$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$.

1 INTRODUCTION

* 1.1 UNE NOTION PRIMITIVE : LA NOTION DE PROTOCOLE

Une notion primitive de la formalisation algébrique de l'Analyse Bayésienne des Comparaisons est la notion de *protocole*.

1.1.1 Observations et protocoles

Protocole - Un *protocole* (ou *application-protocole*) est une application d'un ensemble J , appelé *support* vers un ensemble U , appelé *espace d'observation*. Dans la suite on supposera toujours que le support J est un ensemble fini; l'espace d'observation sera un ensemble numérique ou multinummérique.

Protocole numérique - Un *protocole numérique* sur un support J sera une application:

$$\| \| \begin{array}{l} x: J \rightarrow \mathbb{R} \text{ (ensemble des nombres réels)} \\ j \mapsto x^j \end{array}$$

Observation - Le couple (j, x^j) constitué par l'élément j du support et la valeur numérique x^j qui lui est associée sera appelé une *observation* (numérique); on notera ce couple simplement (x^j) .

Famille des observations - Le graphe de l'application-protocole x , c'est-à-dire l'ensemble des couples $\{(x^j)\}_{j \in J}$ est appelé la *famille des observations* du protocole x ; on notera cette famille plus simplement $(x^j)_{j \in J}$ ou encore \mathbf{x}^J (en caractère gras):

$$\| \| \mathbf{x}^J = (x^j)_{j \in J}$$

Dans ce contexte l'expression "le protocole \mathbf{x}^J " désignera sans ambiguïté l'application-protocole $x: j \mapsto x^j$.

1.1.2 Protocole à analyser

Dans tous les développements formels, on supposera que les données à analyser ont été représentées comme un protocole numérique (nous nous limitons dans cet ouvrage à l'analyse de données univariées) \mathbf{x}^I (de support I) qui sera appelé *protocole à analyser*.

D'une part l'ensemble support I sera muni d'une structure, ou plus exactement sera mis en bijection avec un ensemble muni d'une structure qui constituera le "*plan d'analyse*": un tel plan sera une partie (éventuellement la partie pleine) du produit cartésien de "*facteurs élémentaires*". Ce sera l'objet

de la formalisation ensembliste d'expliciter la structure du plan d'analyse à partir des relations entre les facteurs élémentaires.

D'autre part l'ensemble des protocoles de support I, et de manière plus générale les ensembles de protocoles dérivés de support J ainsi que les ensembles de mesures de support J, seront munis de structures d'espaces vectoriels euclidiens. Ce sera l'objet de la formalisation algébrique d'exploiter ces structures linéaires pour conduire aux procédures descriptives de l'Analyse Bayésienne des Comparaisons. Un aspect fondamental de la formalisation algébrique sera la distinction entre, d'une part l'espace des protocoles dans lequel on "placera" les observations, et d'autre part l'espace des mesures dans lequel on "placera" à la fois les effectifs et les contrastes, lesquels permettront de formaliser les questions que l'on peut poser dans le cadre du plan d'analyse.

* 1.2 PLAN DU CHAPITRE

- 2 STRUCTURES ENSEMBLISTES: FACTEURS, RELATIONS ENTRE FACTEURS, PLAN D'ANALYSE.....
- 2.1 Facteurs.....
- 2.2 Relations d'emboîtement et de croisement
Facteurs composé complet, quasi-complet.....
- 2.3 Plan d'analyse - Type de plans $A \times G \times T$
- 3 STRUCTURES LINEAIRES FONDAMENTALES: PROTOCOLES, CONTRASTES, COMPARAISONS, SOMMES-DES-CARRÉS.....
- 3.1 Dérivations: notion de protocole pondéré.....
- 3.2 Espace des protocoles numériques et espace des mesures de support J.....
- 3.3 Contraste et comparaison sur le support d'un protocole numérique pondéré.....
- 3.4 Somme-des-carrés d'un protocole numérique associée à un contraste, une comparaison - Carré-moyen.....
- 3.5 Remontée des contrastes sur J en des contrastes sur I.....
- 4 TYPES DE COMPARAISONS POUR LES PLANS $A \times G \times T$ - DECOMPOSITIONS D'UN EMBOITEMENT, DECOMPOSITIONS D'UN CROISEMENT.....
- 4.1 Décompositions d'un emboîtement: comparaisons inter et intra.....
- 4.2 Décompositions d'un croisement: conditionnement et interaction.....
- 4.3 Différents types de comparaisons pour les plans $A \times G \times T$
- 4.4 Calculs des sommes-des-carrés dans les plans $A \times G \times T$

5 CARACTERISATION DE L'EFFET D'UN CONTRASTE, D'UNE COMPARAISON.....

5.1 Préalable: effet d'un facteur,

grandeur et représentant de l'effet.....

5.2 Effet d'un contraste, effet d'une comparaison.....

* * *

2 STRUCTURES ENSEMBLISTES:
FACTEURS, RELATIONS ENTRE FACTEURS, PLAN D'ANALYSE

* 2.1 FACTEURS

2.1.1 Facteur d'un protocole

Définition - Etant donné un protocole \mathbf{x}^j un facteur du protocole \mathbf{x}^j (ou brièvement un facteur s'il n'y a pas d'ambiguïté) est un ensemble fini F tel qu'il existe une application surjective:

$$\begin{array}{l} f: J \rightarrow F \\ j \in J \mapsto f_j \end{array}$$

En d'autres termes un facteur est un ensemble qui indexe une partition des observations: à tout élément f de F, appelé modalité du facteur, correspond une classe (non-vide) des observations, à savoir l'ensemble des (x^j) tels que j appartient à $f^{-1}(f)$.

Facteur constant - Un facteur qui a une seule modalité est un facteur constant; il indexe la partition grossière des observations.

Facteur-partiel - Si F' est une partie stricte de F (supposé n'être pas constant), F' sera appelé facteur-partiel (de F).

2.1.2 Facteur composé

Définition - Etant donné deux facteurs E et F du protocole \mathbf{x}^j , caractérisés respectivement par les applications $e: j \in J \mapsto e_j$ et $f: j \in J \mapsto f_j$, l'image de l'application

$$\begin{array}{l} J \rightarrow E \times F \\ j \in J \mapsto (e_j, f_j) \end{array}$$

est encore un facteur du protocole \mathbf{x}^j : ce facteur sera appelé facteur composé de E et F et sera noté $E \times F$; les couples (e, f) de $E \times F$ seront notés simplement ef .

Cette définition se généralise d'une manière évidente à la composition d'un nombre quelconque de facteurs.

* 2.2 RELATIONS D'EMBOÏTEMENT ET DE CROISEMENT - FACTEUR COMPOSÉ COMPLET, QUASI-COMPLET

Nous définirons maintenant deux des relations entre facteurs les plus usuelles, la relation d'emboîtement et la relation de croisement.

2.2.1 Relation d'emboîtement

Définition - Le facteur E sera dit emboîté dans le facteur F si chaque modalité de E est affectée à exactement une modalité de F. Le facteur composé $E \times F$ sera dans ce cas appelé l'emboîtement de E dans F et sera noté $E \langle F \rangle$, où E est le facteur emboîté et F le facteur emboîtant (noter la dissymétrie).

On remarquera que cette définition est une simplification de la notion plus restrictive qu'on trouvera dans Lépine (1977 a et b).

Voici un exemple de graphe d'une relation d'emboîtement:

f1	f2	f3
e1	v	
e2	v	
e3	v	
e4	v	
e5	v	
e6	v	
e7	v	

Notations - Un couple ef de $E \langle F \rangle$ sera noté $e \langle f \rangle$ pour rappeler la relation d'emboîtement.

Si F' est un sous-ensemble de F, on notera $E \langle F' \rangle$ l'ensemble des couples $e \langle f \rangle$ tels que f appartient à F' (emboîtement partiel de E dans F').

Dans le cas où F' = {f} on notera $E \langle f \rangle$ pour $E \langle \{f\} \rangle$ (emboîtement partiel de E dans la modalité f).

Enfin la notation $E(f)$ désignera l'ensemble des modalités de E emboîtées dans la modalité f; on aura donc $E(f) \subset E \langle f \rangle$.

Ainsi, pour l'exemple précédent, on a:

$$E \langle F2 \rangle = \{e3 \langle f2 \rangle, e4 \langle f2 \rangle, e5 \langle f2 \rangle\}$$

$$E \langle F2 \rangle = \{e3, e4, e5\}$$

et, si F' = {f2, f3},

$$E \langle F' \rangle = E \langle F2 \rangle \cup E \langle F3 \rangle = \{e3 \langle f2 \rangle, e4 \langle f2 \rangle, e5 \langle f2 \rangle, e6 \langle f3 \rangle, e7 \langle f3 \rangle\}$$

Emboîtement équilibré - L'emboîtement $E \langle F \rangle$ sera dit équilibré si tous les emboîtements partiels $e \langle f \rangle$ ont le même nombre de modalités.

Cas particulier: relation de confusion - Si le nombre de modalités de chaque emboîtement partiel $E \langle f \rangle$ est réduit à 1, on dira que E et F sont en relation de confusion; cette relation est symétrique: on a dans ce cas à la fois E emboîté dans F et F emboîté dans E.

2.2.2 Relation de croisement

Définition - Les facteurs E et F seront dits *croisés* si à chaque couple ef de E×F correspond au moins une observation, autrement dit si E×F est un facteur du protocole. Le facteur composé E×F sera dans ce cas appelé le *croisement* de E et de F et sera noté E×F, ou encore F×E, la relation de croisement étant manifestement symétrique.

Voici un exemple de graphe d'une relation de croisement:

f1	f2	f3
e1	v	v
e2	v	v

Cette définition se généralise d'une manière évidente au croisement d'un nombre quelconque de facteurs. Mais il est important de noter que plusieurs facteurs peuvent être croisés deux à deux sans que le facteur composé de tous ces facteurs soit un croisement; il suffit, pour s'en convaincre, de considérer le contre-exemple suivant: si le composé de trois facteurs E, F et G est E×F×G = {e1f1g1, e1f2g2, e2f1g2, e2f2g1}, on a effectivement dans ce cas les trois croisements binaires E×F, E×G et F×G, mais pas le croisement ternaire.

2.2.3 Facteur composé complet, quasi-complet

Définition - Etant donné plusieurs facteurs (non composés), leur facteur composé sera dit:

- *complet* si ce composé est un croisement;
- *quasi-complet* si, d'une part tous les facteurs composés binaires sont soit des croisements soit des emboîtements, et d'autre part le composé de tous les facteurs qui sont croisés deux à deux est lui-même un croisement; intuitivement un facteur quasi-complet est un facteur "complet aux emboîtements près".

Formule d'un facteur quasi-complet - Un facteur quasi-complet peut s'exprimer à partir des facteurs composants au moyen d'une *formule*, dont l'écriture est "linéaire" (au sens de la concaténation des lettres et des symboles) et fait intervenir uniquement les symboles "<" et "*". On aura par exemple les formules:

E<F>
 R<E<F>>
 A*B
 R<E<F>*D>*A<C>

* 2.3 PLAN D'ANALYSE - TYPE DE PLANS A<G>*I

2.3.1 Plan d'un protocole

Définition - Etant donné un protocole de support J, un *plan* de ce protocole est un facteur tel que l'application qui le caractérise est bijective. En d'autres termes un plan est un facteur qui indexe la partition la plus fine des observations (on remarquera que le support J constitue lui-même un plan du protocole).

2.3.2 Plan d'analyse - Facteur de groupe, facteur systématique

Définition - On appellera *plan d'analyse* un plan du protocole à analyser \mathcal{I} défini comme le composé d'une famille de *facteurs élémentaires* (c'est-à-dire qu'on ne décomposera pas), pour lequel chacun des facteurs élémentaires a été caractérisé:

- soit comme un *facteur de groupe*, c'est-à-dire un facteur dont les modalités seront toujours traitées de façon symétrique (cf Rouanet et Lépine, 1973);
- soit comme un *facteur systématique*, c'est-à-dire un facteur aux modalités spécifiques duquel on s'intéresse en principe.

Remarques sur le choix du plan d'analyse - En ce qui concerne la caractérisation de chaque facteur élémentaire comme facteur de groupe ou facteur systématique, cette caractérisation dépendra essentiellement des objectifs de l'expérience: pour un facteur de groupe, les conclusions recherchées portent toujours sur l'effet du facteur envisagé *globalement*, et non sur telle ou telle modalité particulière; pour un facteur systématique, les conclusions recherchées (au moins certaines d'entre elles) portent souvent sur telle ou telle *modalité particulière* du facteur.

Par exemple, en psychologie, on donne souvent au facteur Sujets (individus, adultes, enfants, animaux...) le statut de facteur de groupe, tandis que les facteurs qui décrivent les conditions expérimentales sont bien entendus considérés comme des facteurs systématiques.

En définitive, le choix d'un plan d'analyse, parmi les différents plans du protocole à analyser, relève en grande partie de considérations méthodologiques qui sont abordées dans la deuxième partie de cet ouvrage, à partir d'un exemple particulier.

2.3.3 Type de plans $A \langle G \rangle * T$

Nous nous limiterons dans cet ouvrage à des plans d'analyse du type $A \langle G \rangle * T$.

Caractérisation - Les plans d'analyse du type $A \langle G \rangle * T$ peuvent être caractérisés de la manière suivante:

- (1) ils ne contiennent qu'un seul facteur de groupe, noté \underline{A} (souligné pour indiquer son statut);
- (2) le facteur composé de \underline{A} avec n importe quel autre facteur élémentaire est, soit un emboîtement, soit un croisement, et on désignera par G le composé de tous les facteurs élémentaires dans lesquels \underline{A} est emboîté et par T le composé de tous les facteurs élémentaires avec lesquels \underline{A} est croisé;
- (3) \underline{A} est emboîté dans G (ce qui découle de la définition de G) et \underline{A} et T sont croisés.

Cas particuliers - Le type de plans $A \langle G \rangle$ (T constant) est celui des groupes séparés (ou groupes "indépendants"); typiquement, dans l'exemple d'un facteur de groupe Sujets, le facteur G est le composé de facteurs de classification des sujets (Sexe, Age, Catégorie socio-professionnelle...) ou de facteurs rendant compte de l'affectation des sujets à un ensemble de conditions expérimentales (chaque sujet étant affecté à une seule condition).

Le type de plans $A * T$ (G constant) est celui des groupes appareillés; typiquement, toujours dans le même exemple, le facteur T est un ensemble de traitements auxquels sont soumis tous les sujets.

Le type de plans $A \langle G \rangle * T$ apparaît comme la combinaison des types $A \langle G \rangle$ et $A * T$; il est en fait le type de plans général qu'il suffira de considérer. Une situation particulière intéressante est celle où le plan est quasi-complet: les éventuels facteurs G et T sont eux-mêmes des facteurs quasi-complets; dans ce cas en effet, comme on l'a vu précédemment, on dispose alors de formules d'écriture du plan, par exemple $A \langle L * M \rangle$, $S \langle G \langle H \rangle * K \rangle * R \langle T \rangle * P \langle X * Y \rangle$, $S * C * E * R$ (cas d'un plan complet), etc. Mais il faut bien insister sur le fait que les méthodes qui seront développées ne sont pas limitées à cette situation, et sont valides pour des facteurs G et T absolument quelconques, dans le cadre de la structure $A \langle G \rangle * T$. De même aucune supposition n'est faite sur le caractère équilibré ou non-équilibré de l'emboîtement $A \langle G \rangle$.

*
*
*

3 STRUCTURES LINEAIRES FONDAMENTALES:
PROTOCOLLES, CONTRASTES, COMPARAISONS, SOMMES-DES-CARRES

*3.1 DERIVATIONS: NOTION DE PROTOCOLE PONDERE

3.1.1 Protocoles dérivés du protocole à analyser

A partir du protocole à analyser, on dérivera de nouveaux protocoles. En particulier, on utilisera la dérivation par restriction du support et la dérivation par moyennage; ces deux types de dérivation conduisent respectivement à la notion de sous-protocole et à la notion de protocole dérivé par moyennage.

Sous-protocole - On appellera sous-protocole (ou encore protocole-partiel) du protocole à analyser \mathbf{x}^I toute restriction de l'application x à une partie du support, soit pour $I \subset I$ l'application x^I :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^I: I^I &\rightarrow \mathbb{R} \\ i \in I^I &\mapsto x^i \end{aligned}$$

Protocole dérivé par moyennage - Soient I^I une partie du support I et I une partition de I^I dont les classes sont indexées par un ensemble J ; on définira le protocole dérivé par moyennage du protocole \mathbf{x}^I qui, à chaque classe I_j de la partition I associe la moyenne des observations (x^i) pour i appartenant à I_j , soit:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^J: I^J &\rightarrow \mathbb{R} \\ j \in I^J &\mapsto \frac{1}{\text{card}(I_j)} \sum_{i \in I_j} x^i \end{aligned}$$

On identifiera la partition I à l'ensemble J et chaque classe I_j à l'élément j , et on notera:

$$\begin{aligned} n_j &= \text{card}(I_j) & \mathbf{n}_J &= (n_j)_{j \in J} \\ x_j^j &= \frac{1}{n_j} \sum_{i \in I_j} x^i & \mathbf{x}^J &= (x_j^j)_{j \in J} \end{aligned}$$

Mais nous aurons encore à considérer d'autres types de dérivation conduisant, non plus à des protocoles numériques, mais à des protocoles multinomériques. Ces différents types de dérivation conduisent finalement à la notion générale de protocole multinomérique pondéré de support fini.

3.1.2 Protocoles multinomériques pondérés

Etant donné un ensemble fini J , muni d'une pondération $(n_j)_{j \in J}$ un protocole multinomérique pondéré de support J est une application de J dans \mathbb{R}^p ($p \geq 1$).

Outre les protocoles dérivés par moyennage, ou par d'autres types de dérivation, le protocole à analyser \mathfrak{X}^I peut lui-même être considéré comme un protocole pondéré de support I, avec $p = 1$ (protocole numérique) et avec la pondération uniforme $n_i = 1$ pour tout i .

Les notions précédentes de sous-protocole et de protocole dérivé par moyennage s'étendent immédiatement au cas d'un protocole pondéré. Dans ce cas, pour définir un protocole dérivé par moyennage d'un protocole pondéré, on peut choisir entre le moyennage pondéré et le moyennage équipondéré; par exemple, partant d'un protocole numérique pondéré \mathfrak{X}^J , pour une classe J_k , on aura:

$$- \text{ la moyenne pondérée } \frac{1}{\sum_{j \in J_k} n_j} \sum_{j \in J_k} n_j x_j^j$$

$$- \text{ la moyenne équipondérée } \frac{1}{\text{card}(J_k)} \sum_{j \in J_k} x_j^j$$

qui coïncident si et seulement si la pondération n_j est uniforme.

Même si, techniquement, nous serons amené par la suite à considérer des protocoles multinumériques, les seules notions théoriques dont nous aurons en fait besoin sont celles liées aux protocoles numériques pondérés; dans ce qui suit nous nous limiterons donc à l'étude de ces protocoles.

* 3.2 ESPACE DES PROTOCOLES NUMÉRIQUES ET ESPACE DES MESURES DE SUPPORT J

3.2.1 Espaces \mathbb{R}^J et \mathbb{R}_J

Structure d'espace vectoriel - Étant donné un support J, muni de la pondération $n_j = (n_j)_{j \in J}$, l'ensemble des protocoles numériques de support J sera noté \mathbb{R}^J et l'ensemble des mesures de support J sera noté \mathbb{R}_J . Ces deux ensembles seront munis de la structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension $\text{card}(J)$.

Indices supérieurs et inférieurs - D'une manière générale, nous ferons apparaître la distinction entre les deux espaces dans les notations, en utilisant des indices supérieurs pour l'espace des protocoles et des indices inférieurs pour l'espace des mesures; c'est ainsi que nous avons noté \mathfrak{X}^J et $(x^j)_{j \in J}$ un protocole de support J et $\mathfrak{u}_J = (u_j)_{j \in J}$ la pondération sur J.

Identification des mesures et des formes linéaires - Toute mesure \mathfrak{u}_J peut être identifiée à une forme linéaire sur \mathbb{R}^J , à savoir la forme linéaire qui, à tout protocole $\mathfrak{X}^J = (x^j)_{j \in J}$, associe le scalaire $\sum_{j \in J} u_j x^j$. On identifiera donc l'espace des mesures \mathbb{R}_J à l'espace vectoriel dual de l'espace \mathbb{R}^J .

Produit scalaire sur \mathbb{R}^J - L'espace des protocoles numériques de support J sera muni du produit scalaire canoniquement associé à la pondération n_j , c'est-à-dire le produit scalaire qui, à tout couple $(\mathfrak{X}^J, \mathfrak{Y}^J)$ d'éléments de \mathbb{R}^J , associe le scalaire:

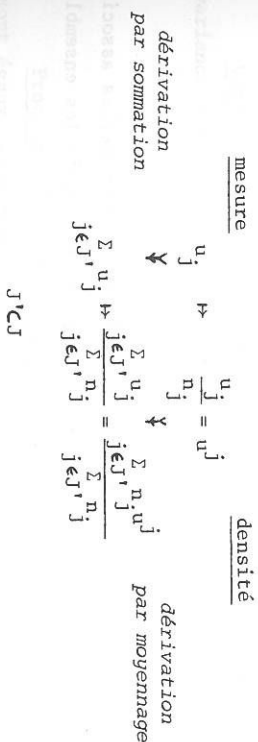
$$\left\| \sum_{j \in J} n_j x_j^j y_j^j \right\|$$

Mesure fondamentale sur J - La pondération n_j , à partir de laquelle sont définis le produit scalaire ainsi que la procédure de dérivation par moyennage (pondéré), est appelée mesure fondamentale sur le support J.

3.2.2 Isomorphisme de \mathbb{R}^J et \mathbb{R}_J

Caractérisation de l'isomorphisme - Considérons l'isomorphisme de \mathbb{R}_J dans \mathbb{R}^J qui, à toute mesure $\mathfrak{u}_J = (u_j)_{j \in J}$, associe sa densité par rapport à la mesure fondamentale \mathfrak{u}^J , à savoir l'élément de l'espace des protocoles $\mathfrak{u}^J = (u^j)_{j \in J}$, où $u^j = \frac{u_j}{n_j}$.

Si on remarque qu'à la procédure de dérivation par moyennage définie pour les protocoles correspond, en ce qui concerne les mesures, la procédure de dérivation par sommation, il apparaît, dans le schéma ci-dessous, que l'isomorphisme précédent permet de passer de la dérivation par sommation qui s'applique à la mesure \mathfrak{u}_J à la dérivation par moyennage pour sa densité \mathfrak{u}^J :



Remarques - Nous ferons les remarques suivantes.

• La densité de la mesure fondamentale est l'application constante:

$$j \mapsto n^j = \frac{n_j}{n_j} = 1$$

• L'isomorphisme réciproque, de \mathbb{R}^J dans \mathbb{R}_J , associée à tout protocole numérique $\mathfrak{X}^J = (x^j)_{j \in J}$ la mesure $\mathfrak{X}_J = (x_j)_{j \in J}$ où $x_j = n_j x^j$, dont il est la densité. On notera qu'il est plus usuel (si non plus "naturel") de représenter une mesure par sa densité que de représenter un protocole dans l'espace des mesures.

• Cet isomorphisme permet d'identifier le produit scalaire sur \mathbb{R}^J à la forme bilinéaire canonique sur $\mathbb{R}_J \times \mathbb{R}^J$, à savoir la forme bilinéaire de $\mathbb{R}_J \times \mathbb{R}^J$ dans \mathbb{R} qui, à tout couple $(\mathbf{u}_J, \mathbf{x}_J)$, associe le scalaire :

$$\sum_{j \in J} u_j x_j^j$$

• L'isomorphisme réciproque permet en outre de transporter le produit scalaire de \mathbb{R}^J à l'espace des mesures \mathbb{R}_J : à tout couple de mesures $(\mathbf{u}_J, \mathbf{v}_J)$ sera associé le scalaire :

$$\sum_{j \in J} \frac{u_j v_j}{n_j}$$

qui n'est autre que le produit scalaire dans \mathbb{R}^J de leurs densités, à savoir

$$\sum_{j \in J} n_j u_j^j v_j^j = \sum_{j \in J} n_j \frac{u_j^j v_j^j}{n_j}$$

• Ainsi on aura finalement identifié :

- Le produit scalaire sur l'espace des protocoles \mathbb{R}^J

$$\mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J \mapsto \mathbb{R} \quad (\mathbf{x}^J, \mathbf{y}^J) \mapsto \sum_{j \in J} n_j x_j^j y_j^j$$
- Le produit scalaire sur l'espace des mesures \mathbb{R}_J

$$\mathbb{R}_J \times \mathbb{R}_J \mapsto \mathbb{R} \quad (\mathbf{u}_J, \mathbf{v}_J) \mapsto \sum_{j \in J} \frac{u_j^j v_j^j}{n_j}$$
- La forme bilinéaire canonique ("intégrale par rapport à une mesure")

$$\mathbb{R}_J \times \mathbb{R}^J \mapsto \mathbb{R} \quad (\mathbf{u}_J, \mathbf{x}^J) \mapsto \sum_{j \in J} u_j^j x_j^j$$

3.2.3 Norme, orthogonalité, projection

Les notions de *norme*, *orthogonalité*, *projection* seront celles associées à la structure d'espace vectoriel euclidien dont ont été munis les ensembles \mathbb{R}^J et \mathbb{R}_J .

On identifiera ainsi :

- la norme d'un protocole \mathbf{x}^J

$$\left(\sum_{j \in J} n_j x_j^j \right)^{\frac{1}{2}}$$

- la norme d'une mesure \mathbf{u}_J

$$\left(\sum_{j \in J} \frac{u_j^2}{n_j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

On identifiera encore :

- l'orthogonalité de deux protocoles \mathbf{x}^J et \mathbf{y}^J , caractérisée par

$$\sum_{j \in J} n_j x_j^j y_j^j = 0$$
- l'orthogonalité de deux mesures \mathbf{u}_J et \mathbf{v}_J , caractérisée par

$$\sum_{j \in J} \frac{u_j^j v_j^j}{n_j} = 0$$
- l'orthogonalité d'une mesure \mathbf{u}_J et d'un protocole \mathbf{x}^J , caractérisée par

$$\sum_{j \in J} u_j^j x_j^j = 0$$

* 3.3 CONTRASTE ET COMPARAISON SUR LE SUPPORT D'UN PROTOCOLE NUMÉRIQUE PONDÉRÉ

3.3.1 Définitions

Nombre de degrés de liberté - La dimension d'un sous-espace de l'espace des mesures sera appelée son *nombre de degrés de liberté*, en abrégé d.l...

Moyenne d'un protocole - Etant donné un protocole \mathbf{x}^J on définira sa *moyenne* \bar{x} comme la moyenne pondérée :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j \in J} n_j x_j^j}{\sum_{j \in J} n_j}$$

Variance d'un protocole - Etant donné un protocole \mathbf{x}^J on définira sa *variance* v comme :

$$v = \frac{\sum_{j \in J} n_j (x_j^j - \bar{x})^2}{\sum_{j \in J} n_j}$$

Protocole constant - Un protocole \mathbf{x}^J sera dit *constant* si tous les x_j^j sont égaux, autrement dit si sa variance est nulle. L'ensemble des protocoles constants de support J est un *sous-espace vectoriel* de dimension 1 de \mathbb{R}^J . Etant donné un protocole quelconque \mathbf{x}^J de moyenne \bar{x} , le protocole constant $\mathbf{j} \mapsto \bar{x}$ (\mathbf{j} parcourant J) est la projection orthogonale de \mathbf{x}^J sur le sous-espace des protocoles constants.

Protocole centré - Un protocole sera dit *centré* si sa moyenne \bar{x} est

nulle, c'est-à-dire si et seulement si ce protocole est orthogonal à la mesure fondamentale \mathbf{n}_J ; ou encore, de manière équivalente, s'il est orthogonal au sous-espace des protocoles constants (la densité de la mesure fondamentale étant, rappelons-le, un protocole constant). Donc l'ensemble des protocoles

centré est le sous-espace vectoriel de dimension $\text{card}(J) - 1$, supplémentaire orthogonal du sous-espace des protocoles constants.

3.3.2 Contraste sur le support J

Définition - On appellera contraste sur J toute mesure $c_J = (c_j)_{j \in J}$ dont la somme des coefficients est nulle, soit $\sum_{j \in J} c_j = 0$.

Densité d'un contraste, espace des contrastes - La densité d'un contraste c_J , c'est-à-dire $c_J = (c_j)_{j \in J}$ où $c_j = \frac{c_j}{n_j}$, est donc un protocole centré; inversement tout protocole centré est la densité d'un contraste sur J. Par conséquent l'espace des contrastes sur J (sous-espace de R_J) peut être identifié au sous-espace des protocoles centrés et a donc $\text{card}(J) - 1$ degrés de liberté; cet espace sera noté \mathcal{J} .

3.3.3 Comparaison sur le support J, sous-comparaison

Définition - On appellera comparaison sur J tout sous-espace \mathcal{C} de l'espace des contrastes sur J; cet espace \mathcal{J} sera lui-même appelé comparaison globale sur J. Le nombre de degrés de liberté de la comparaison \mathcal{C} sera noté $\text{dl}(\mathcal{C})$.

Sous-comparaison - Etant donné une comparaison \mathcal{C} , tout sous-espace de \mathcal{C} sera appelé sous-comparaison de la comparaison \mathcal{C} .

* 3.4 SOMME-DES-CARRÉS D'UN PROTOCOLE NUMÉRIQUE ASSOCIÉE À UN CONTRASTE, À UNE COMPARAISON - CARRE-MOYEN

3.4.1 Définition de la somme-des-carrés

Etant donné un protocole numérique x^J et une comparaison \mathcal{C} (resp. un contraste c_J), la somme-des-carrés du protocole x^J associée à la comparaison \mathcal{C} (resp. au contraste c_J) est le carré de la norme de la projection du protocole sur cette comparaison (resp. sur la comparaison engendrée par ce contraste), ou plus précisément sur le sous-espace des protocoles centrés qui lui correspond dans R_J .

On notera que l'on dit encore inertie au lieu de somme-des-carrés, mais nous préférerons ici ce dernier terme, usuel dans l'analyse de la variance classique.

3.4.2 Formules de calcul

Nous nous limiterons ici à indiquer les formules de calcul suivantes.

Cas de la comparaison globale - La somme-des-carrés du protocole x^J associée à la comparaison globale sur J (on dit encore inertie du protocole x^J) sera notée $sc_{\mathcal{J}}$; elle peut être calculée par les formules:

$$\begin{aligned} sc_{\mathcal{J}} &= \sum_{j \in J} n_j (x_j^J - \bar{x})^2 = v \sum_{j \in J} n_j \\ &= \sum_{j \in J} n_j x_j^{j^2} - \bar{x}^2 \sum_{j \in J} n_j \\ &= \sum_{j^1 j^2 < j^1} \frac{n_{j^1} n_{j^2}}{n} (x_{j^1}^{j^1} - x_{j^2}^{j^2})^2 \quad \text{où } n = \sum_{j \in J} n_j \end{aligned}$$

Cas d'une comparaison - La somme-des-carrés du protocole x^J associée au contraste c_J sera notée sc_{c_J} ; on a:

$$sc_{c_J} = \frac{\left[\sum_{j \in J} c_j x_j^J \right]^2}{\sum_{j \in J} \frac{c_j^2}{n_j}}$$

Cas d'une comparaison quelconque - La somme-des-carrés du protocole x^J associée à une comparaison quelconque \mathcal{C} à m degrés de liberté sera notée $sc_{\mathcal{C}}$ et pourra être calculée par la formule générale suivante. Soit une base de \mathcal{C} , c'est-à-dire une famille de m contrastes c_J^k ($k = 1, \dots, m$) linéairement indépendants; on a alors la formule matricielle:

$$sc_{\mathcal{C}} = x^{J^t} c (c^N_J c)^{-1} c^t x^J$$

où x^J est le vecteur colonne des x_j^J ($j \in J$);

c est la matrice à $\text{card}(J)$ lignes et m colonnes des coefficients c_j^k ($j \in J; k = 1, \dots, m$);

N_J est la matrice carrée diagonale dont les éléments diagonaux sont le $\text{card}(J)$ coefficients n_j de la mesure fondamentale sur J;

les symboles $'$ et -1 désignent respectivement la transposition et l'inversion des matrices.

Si on choisit une base orthogonale (par rapport à la mesure fondamentale sur J), la matrice $c^N_J c$ est diagonale et son inversion est immédiate; en particulier, si on choisit une base telle que $c^N_J c = \frac{1}{k} I_m$ (où I_m est la matrice $m \times m$ unité), on aura simplement:

$$sc_{\mathcal{C}} = k x^{J^t} c c^t x^J \quad k > 0$$

3.4.3 Additivité des sommes-des-carrés

Propriété d'additivité - Si les comparaisons $\mathbb{C}1$ et $\mathbb{C}2$ sont orthogonales, l'espace somme directe des comparaisons $\mathbb{C}1$ et $\mathbb{C}2$ est une comparaison qui sera notée $\mathbb{C}1+\mathbb{C}2$; on a, de manière évidente, la propriété d'additivité des degrés de liberté et des sommes-des-carrés:

$$\begin{aligned} dl(\mathbb{C}1+\mathbb{C}2) &= dl(\mathbb{C}1) + dl(\mathbb{C}2) \\ sc_{\mathbb{C}1+\mathbb{C}2} &= sc_{\mathbb{C}1} + sc_{\mathbb{C}2} \end{aligned}$$

Comparaison résiduelle - On en déduit que, si $\mathbb{C}1$ est une sous-comparaison stricte de la comparaison \mathbb{C} , et si on désigne par $\mathbb{C}2$ le sous-espace orthogonal de $\mathbb{C}1$ par rapport à \mathbb{C} , c'est-à-dire la comparaison telle que $\mathbb{C} = \mathbb{C}1+\mathbb{C}2$, alors:

$$\begin{aligned} dl(\mathbb{C}2) &= dl(\mathbb{C}) - dl(\mathbb{C}1) \\ sc_{\mathbb{C}2} &= sc_{\mathbb{C}} - sc_{\mathbb{C}1} \end{aligned}$$

On dit dans ce cas que $\mathbb{C}2$ est la comparaison résiduelle de $\mathbb{C}1$ par rapport à \mathbb{C} et on note $\mathbb{C}2 = \mathbb{C}-\mathbb{C}1$.

3.4.4 Carré-moyen

Etant donné un protocole \mathbb{X}_J^J et une comparaison \mathbb{C} à m degrés de liberté sur J , on appellera carré-moyen du protocole \mathbb{X}_J^J associé à la comparaison \mathbb{C} la quantité $cm_{\mathbb{C}} = \frac{sc_{\mathbb{C}}}{m}$, rapport de la somme-des-carrés au nombre de degrés de liberté.

Dans le cas d'un contraste \mathbf{e}_J (ou encore d'une comparaison à 1 degré de liberté) le carré-moyen sera bien entendu égal à la somme-des-carrés (puisque $m=1$): $cm_{\mathbb{C}} = sc_{\mathbf{e}_J}$.

* 3.5 REMONTÉE DES CONTRASTES SUR J EN DES CONTRASTES SUR I

Dans la pratique, quand on s'intéresse à une comparaison, cette comparaison est définie de manière naturelle sur un support J dérivé du support I du protocole à analyser (par exemple on "compare deux moyennes"); on utilisera donc les formules précédentes et on calculera la somme-des-carrés à partir des coefficients n_j de la mesure fondamentale sur J et des moyennes \bar{x}_j^J .

Pour qu'une telle façon de procéder soit légitime, il faut, en toute rigueur, que l'on puisse également définir cette comparaison sur le support I et calculer cette même somme-des-carrés directement sur ce support. Ceci peut être obtenu en définissant un homomorphisme injectif pour la structure euclidienne (c'est-à-dire conservant le produit scalaire) de R_J dans R_I ; cet homomorphisme

caractérise une procédure de remontée des mesures (et donc en particulier des contrastes) de support J en des mesures de support I . Cette procédure est définie de manière détaillée par Rouanet et Lépine (1976); il suffira ici de noter le résultat fondamental, à savoir que, quelle que soit la comparaison \mathbb{C} considérée, il est équivalent de calculer la somme-des-carrés du protocole dérivé \mathbb{X}_J^J associée à la comparaison \mathbb{C} ou de calculer la somme-des-carrés du protocole \mathbb{X}_I^I associée à la comparaison "remontée" de \mathbb{C} sur I .

Cette équivalence permet d'assimiler toute comparaison sur J (sous-espace de R_J) à une sous-comparaison de la comparaison globale sur I (sous-espace de R_I); on peut donc parler légitimement de la comparaison \mathbb{C} , sans préciser dans quel espace R_J ou R_I on se situe.

D'une manière générale, si le protocole \mathbb{X}_J^J est dérivé par moyennage d'un protocole \mathbb{X}_K^K , toute comparaison sur J peut être remontée en une comparaison sur K et donc être assimilée à une sous-comparaison de la comparaison globale sur K .

*
*

4 TYPES DE COMPARAISONS POUR LES PLANS $\underline{A} \langle G \rangle * T$
 DECOMPOSITIONS D'UN EMBOTTEMENT, DECOMPOSITIONS D'UN CROISEMENT

Les différents types de comparaisons pour les plans $\underline{A} \langle G \rangle * T$ seront caractérisés à partir des décompositions de l'embottement $\underline{A} \langle G \rangle$ et du croisement $G * T$. Nous commencerons donc par considérer, d'une manière générale, les décompositions liées à un emboîtement et à un croisement. Nous nous limiterons ici à énoncer les définitions et propriétés relatives à ces décompositions; les démonstrations de ces propriétés sont données dans Rouanet et Lépine (1976).

* 4.1 DECOMPOSITION D'UN EMBOTTEMENT: COMPARAISONS INTER ET INTRA

Etant donné un emboîtement $E \langle F \rangle$, E et F seront les supports de deux protocoles pondérés \mathfrak{X}^E et \mathfrak{X}^F , \mathfrak{X}^F étant dérivé par moyennage de \mathfrak{X}^E . On remarquera que $E \langle F \rangle$ est lui-même un support en correspondance terme à terme avec E .

4.1.1 Définitions

Contraste, comparaison inter - On appellera *contraste inter* (*inter-F*) si la précision est nécessaire) tout contraste sur E qui peut être assimilé à un contraste de la comparaison globale sur F , c'est-à-dire qui est la remontrée sur E d'un contraste sur F .

On appellera *comparaison inter* tout sous-espace de l'espace des contrastes inter; l'espace des contrastes inter est, d'une manière évidente, la comparaison globale sur F , ou comparaison inter "maximum", qui sera notée F .

Contraste, comparaison intra - On appellera *contraste intra* (*intra-F*, ou encore à l'intérieur de F , si la précision est nécessaire) tout contraste $C_E = (c_e)$ sur E dont la restriction à chacune des parties $E(f)$:

- soit est un contraste sur cette partie, $\sum_{e \in E(f)} c_e = 0$;
- soit a tous ses coefficients nuls sur cette partie.

En particulier, si un contraste intra est tel que, pour un f donné, on ait $\sum_{e \in E(f)} c_e = 0$ et $c_e = 0$ pour tout e n'appartenant pas à $E(f)$, alors on dira que ce contraste est un *contraste intra-f*.

On appellera *comparaison intra-F* (resp. *intra-f*) tout sous-espace de l'espace des contrastes intra-F (resp. intra-f). Les espaces des contrastes intra-F et intra-f, ou comparaisons intra-F et intra-f maxima, seront notés respectivement $E(F)$ et $E(f)$.

4.1.2 Propriétés

- Toute comparaison inter-F est orthogonale à toute comparaison intra-F.
- Toute comparaison intra-f' est orthogonale à toute comparaison intra-F'' pour $f' \neq f''$. En particulier la somme directe $\sum_{f \in F} E(f)$, où F' est une partie de F , est une comparaison intra qui sera notée $E(F')$.

• Il résulte des propriétés précédentes que la comparaison globale sur E , soit E (que l'on pourrait encore noter $E \langle F \rangle$), se décompose orthogonalement comme:

$$\begin{aligned} E &= E + E(F) \\ &= E + \sum_{f \in F} E(f) \end{aligned}$$

* 4.2 DECOMPOSITIONS D'UN CROISEMENT: CONDITIONNEMENT ET INTERACTION

Etant donné un croisement $E * F$, $E * F$ sera le support d'un protocole pondéré $\mathfrak{X}^{E * F}$ et E et F seront respectivement les supports des protocoles dérivés par moyennage de $\mathfrak{X}^{E * F}$, \mathfrak{X}^E et \mathfrak{X}^F .

4.2.1 Comparaisons inter et intra pour un croisement

En remarquant que $E * F$ est, d'une manière évidente, emboîté dans chacun des facteurs E et F , on peut d'abord étendre au cas d'un croisement les notions de comparaisons inter et intra.

Comparaisons inter - Les comparaisons globales sur E et sur F , soit respectivement E et F , sont les comparaisons inter-E et inter-F maxima.

Contrastes, comparaisons intra-e et intra-f - Etant donné un contraste $\mathfrak{V}_E = (v_e) \in E$ sur E (inter-E), on peut lui faire correspondre le contraste intra-f, qui sera noté $\mathfrak{V}_{E(f)}$, caractérisé comme le contraste sur $E * F$ dont les coefficients sont égaux à v_e pour tous les couples ef , e parcourant E (f fixé), et sont nuls autrement. Etant donné un contraste \mathfrak{V}_F sur F , on définit de même le contraste intra-e $\mathfrak{V}_F(e)$.

Etant donné une comparaison W sur E , l'ensemble des contrastes intra-f qui correspondent aux contrastes de W de la manière précédente est une comparaison intra-f qui sera notée $W(f)$. On définit de la même manière la comparaison $W(e)$, où W est une comparaison sur F .

Comparaisons intra-E et intra-F - A toute comparaison W sur E on peut faire correspondre la comparaison intra-F, qui sera notée $W(F')$, où F' est une partie de F , définie comme la somme directe:

$$W(F') = \sum_{f \in F'} W(F)$$

En particulier, si W est la comparaison globale sur E , on aura les comparaisons $E(F)$ et $E(F')$, qui sont respectivement les comparaisons intra- f et intra- F' maxima.

On définit de la même manière les comparaisons $W(E')$, ainsi que les comparaisons intra- e et intra- E maxima $F(e)$ et $F(E)$.

Décompositions orthogonales - On aura finalement les décompositions orthogonales de $E \times F$ (comparaison globale sur $E \times F$):

$$\begin{aligned} E \times F &= E + F(E) = E + \sum_{e \in E} F(e) \\ &= F + E(F) = F + \sum_{f \in F} E(f) \end{aligned}$$

Condition d'orthogonalité des comparaisons E et F - Une condition nécessaire et suffisante pour que les comparaisons (inter) E et F soient orthogonales est que, $\mathbf{A}_{E \times F} = (n_{ef})_{e \in E, f \in F}$ étant la mesure fondamentale sur $E \times F$, on ait pour tout couple ef :

$$\left\| \begin{aligned} n_{ef} &= \sum_{e' \in E} \sum_{f' \in F} n_{e'f'} \\ &= \sum_{e' \in E} \sum_{f' \in F} n_{e'f'} \end{aligned} \right.$$

Cette condition est bien entendu satisfaite si la mesure $\mathbf{A}_{E \times F}$ est uniforme.

4.2.2 Conditionnements

Conditionnement par une modalité - On notera E/f la partie $E \setminus \{f\}$ du produit cartésien $E \times F$. La comparaison intra $E(f)$ peut encore être considérée comme la comparaison globale sur le support E/f (comparaison E conditionnelle à f) et sera pour cette raison notée également E/f .

De la même manière toute comparaison intra- f $W(f)$ sera également notée W/f et tout contraste $\mathbf{V}_{E/f}$ sera également noté $\mathbf{V}_{E/f}$. On définit encore de même la comparaison E/e (en notant F/e pour $\{e\} \times F$) et on caractérise de façon analogue W/e et $\mathbf{V}_{F/e}$.

Conditionnement par une partie - Généralisant la notation $\mathbf{V}_{E/f}$, on désignera par $\mathbf{V}_{E/F'}$ (F' étant une partie donnée de F) le contraste $\mathbf{V}_{E/F'}$ conditionnel à la partie F' , qui est défini comme le contraste sur $E \times F$ dont les coefficients:

$$\begin{aligned} - \text{sont égaux à } \frac{n_{ef}}{\sum_{f' \in F'} n_{ef'}} \text{ si } f \in F'; \\ - \text{sont nuls si } f \notin F'. \end{aligned}$$

Etant donné une comparaison W/E , on définira la comparaison W/F' , comparaison conditionnelle à F' , comme l'ensemble des contrastes sur $E \times F$ qui sont de la forme $\mathbf{V}_{W/F'}$ où \mathbf{V} est un contraste de W . On définit de la même manière le conditionnement d'un contraste $\mathbf{V}_{W/F'}$ ou d'une comparaison W sur F par une partie F' de E .

Remarque importante - Si les comparaisons intra- f $W(f)$ et conditionnelle à f W/f coïncident, il est bien évident que les comparaisons intra- F' $W(F')$ et conditionnelle à F' W/F' sont distinctes dès que la partie F' a plus d'un élément.

4.2.3 Interactions

Contraste d'interaction - On appellera contraste d'interaction (entre E et F) tout contraste qui est orthogonal à E et à F , donc qui est à la fois intra- E et intra- F .

Par suite une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contraste $\mathbf{V}_{E \times F} = (u_{ef})_{e \in E, f \in F}$ soit un contraste d'interaction est que:

$$\begin{aligned} - \text{pour tout } f \text{ on ait } \sum_{e \in E} u_{ef} &= 0; \\ - \text{pour tout } e \text{ on ait } \sum_{f \in F} u_{ef} &= 0. \end{aligned}$$

Comparaison d'interaction - On appellera comparaison d'interaction tout sous-espace de l'espace des contrastes d'interaction. L'espace des contrastes d'interaction, appelé interaction globale entre E et F , sera noté $E.F$, ou encore $F.E$ en raison de la symétrie de la notion d'interaction.

Décomposition orthogonale - Si la condition d'orthogonalité (cf 4.2.1) est satisfaite, on aura la décomposition orthogonale de $E \times F$:

$$\| E \times F = E + F + E.F$$

Contrastes $\mathbf{V}_{E.F}$, comparaisons $W_{E.F}$ - Etant donné un contraste $\mathbf{V}_{E.F}$ = $(v_{ef})_{e \in E, f \in F}$ sur E et un contraste $\mathbf{W}_{E.F}$ = $(w_{ef})_{e \in E, f \in F}$, le contraste $\mathbf{U}_{E.F}$ = $(u_{ef})_{e \in E, f \in F}$ défini par $u_{ef} = v_{ef} w_{ef}$ est un contraste d'interaction qui sera noté $\mathbf{V}_{E.F} \cdot \mathbf{W}_{E.F}$.

On remarquera que, si E ou F ne comporte que deux modalités, tout contraste d'interaction est de la forme $\mathbf{V}_{E.F}$; mais il n'en est pas de même dans le cas général.

Par suite, si W et W' sont deux comparaisons respectivement sur E sur F , l'espace engendré par les contrastes de la forme $\mathbf{V}_{W.W'}$ ($\mathbf{V}_{W.W'} = \mathbf{V}_{W'} \cdot \mathbf{V}_W$) est une comparaison d'interaction qui sera notée $W.W'$; on montre que $dl(W.W') = dl(W) \times dl(W')$.

La comparaison d'interaction globale $E.F$ est de la forme $W.W$ (ce qui justifie sa notation); mais, en général, il existe des sous-comparaisons de $E.F$ qui ne

Distributivité de l'interaction - On a la propriété de distributivité de l'interaction par rapport à la somme des comparaisons orthogonales:

$$\| \text{si } W = W_1 + W_2 \text{ alors } W \cdot M = (W_1 + W_2) \cdot M = W_1 \cdot M + W_2 \cdot M$$

Lemme sur les propriétés de décomposition d'un croisement - Si la condition d'orthogonalité des comparaisons E et F est satisfaite (c'est-à-dire $E * F = E + F + E \cdot F$), on a pour toute comparaison W sur F et pour toute partie E' de E la décomposition orthogonale:

$$\| W(E') = W/E' + W \cdot E'$$

* 4.3 DIFFERENTS TYPES DE COMPARAISONS POUR LES PLANS $A < G > * T$

A partir des propriétés de décomposition d'un emboîtement et d'un croisement, nous pouvons caractériser les différents types de comparaisons (et de contrastes) que nous considérerons pour les plans $A < G > * T$ (cette typologie n'est pas exhaustive).

4.3.1 Trois types de comparaisons sur le facteur systématique $G * T$

Comparaisons W/T_1 - "Comparaison W sur G conditionnelle à une partie T_1 de T "; ce type inclut:

- pour $T_1 = \{t\}$, la comparaison W/t , "comparaison W conditionnelle à la modalité t" (qui est encore la comparaison intra $W(F)$);
- pour $T_1 = T$, la comparaison non conditionnelle W que l'on retrouve sous la forme W/T (d'un point de vue formel W/T est la remontée de W sur $G * T$).

Comparaisons W/G_1 - "Comparaison W sur T conditionnelle à une partie G_1 de G"; ce type inclut:

- pour $G_1 = \{g\}$, la comparaison W/g , "comparaison W conditionnelle à la modalité g" (qui est encore la comparaison intra $W(F)$);
- pour $G_1 = G$, la comparaison non conditionnelle W que l'on retrouve sous la forme W/G (d'un point de vue formel W/G est la remontée de W sur $G * T$).

Comparaisons $W \cdot M$ - "Comparaison d'interaction entre une comparaison W sur G et une comparaison W sur T".

Contrastes V_G/T_1 , W_T/G_1 et $V_G \cdot W_T$ - Correspondant aux trois types de raisons précédents, on aura les trois types de contrastes: V_G/T_1 , W_T/G_1 et $V_G \cdot W_T$.

4.3.2 Deux types de comparaisons mettant en jeu le facteur de groupe A

Comparaisons $A(\tilde{G})/T_1$ - "Comparaison A à l'intérieur de \tilde{G} (partie de G) conditionnelle à la partie T_1 de T"; ce type inclut notamment:

- pour $\tilde{G} = \{g\}$, la comparaison $A(g)/T_1$, "comparaison A à l'intérieur de la modalité g conditionnelle à T_1 ";
- pour $T_1 = T$, la comparaison non conditionnelle $A(\tilde{G})$, "A à l'intérieur de \tilde{G} ", que l'on retrouve sous la forme $A(\tilde{G})/T$;
- et encore les cas particuliers $A(g)$, $A(g)/t$, $A(G)$, $A(G)/t$.

Comparaisons $A(\tilde{G}) \cdot M$ - "Comparaison d'interaction entre la comparaison A à l'intérieur de \tilde{G} (partie de G) et la comparaison W sur T"; ce type inclut notamment:

- pour $\tilde{G} = \{g\}$, la comparaison $A(g) \cdot M$;
- ainsi que les cas particuliers $A(G) \cdot M$ et $A(G) \cdot T$ (où T est la comparaison globale sur T).

4.3.3 Remarques sur les comparaisons W et W

Les comparaisons W et W sont des comparaisons absolument quelconques

sur G et T. Pour fixer les idées, ces comparaisons peuvent être (suivant les possibilités de décomposition de G et de T) des comparaisons inter, des comparaisons intra, des comparaisons conditionnelles, des comparaisons d'interaction; mais cette liste n'est absolument pas limitative. Ainsi, quels que soient G et T, on pourra encore distinguer notamment:

- des comparaisons entre parties d'un facteur; formellement une comparaison sur E est une comparaison entre parties de E s'il existe une famille de parties disjointes de E, indexée par F, telle que cette comparaison soit la remontée sur E de la comparaison globale sur F;
- des comparaisons définies comme la somme directe de comparaisons orthogonales;
- des comparaisons définies comme la résiduelle entre deux comparaisons orthogonales, l'une étant une sous-comparaison de l'autre;
- des comparaisons définies comme les composantes de la régression polynômiale sur un facteur.

Une même comparaison peut bien entendu relever simultanément de plusieurs de ces catégories; par exemple, l'interaction entre une comparaison entre parties et une comparaison résiduelle, conditionnellement à une certaine modalité d'un facteur...

* 4.4.4 CALCUL DES SOMMES-DES-CARRÉS DANS LES PLANS $\underline{A}\langle G \rangle^*T$

Pour une comparaison sur le facteur systématique G^*T , il suffira, dans les développements théoriques, de se donner une base orthogonale de la comparaison et de spécifier la formule générale donnée en 3.4.2.

En ce qui concerne les comparaisons faisant intervenir le facteur de groupe A , il conviendra d'utiliser une expression plus explicite de la somme-des-carrés. On commencera par appliquer la définition de la comparaison Intra-G: $A(\tilde{G}) = \sum_{g \in G} A(g)$, dont on déduit

$$s^c_{A(\tilde{G})/T1} = \sum_{g \in G} s^c_{A(g)/T1}$$

et, en raison de la distributivité de l'interaction,

$$s^c_{A(\tilde{G}) \cdot W} = \sum_{g \in G} s^c_{A(g) \cdot W}$$

Les expressions cherchées sont ensuite obtenues de la manière suivante.

4.4.1 Somme-des-carrés associée à la comparaison $A(\tilde{G})/T1$

La comparaison $A(g)/T1$ est du type "comparaison globale" sur le support $A\langle g \rangle/T1$; pour ce support on a (en notant $T1$ pour $\text{card}(T1)$):

- le protocole dérivé par moyennage
- $a\langle g \rangle/T1 \mapsto \frac{1}{T1} \sum_{t \in T1} x^{a\langle g \rangle t}$
- la mesure fondamentale uniforme
- $a\langle g \rangle/T1 \mapsto \mu_{a\langle g \rangle/T1} = T1$

En appliquant la formule donnant la somme-des-carrés associée à une comparaison globale, on en déduit:

$$s^c_{A(g)/T1} = \sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} T1 (x^{a\langle g \rangle/T1} - x^{g/T1})^2$$

$$\text{où } x^{g/T1} = \frac{1}{\text{card}(A\langle g \rangle)} \sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} x^{a\langle g \rangle/T1}$$

d'où finalement:

$$s^c_{A(\tilde{G})/T1} = T1 \sum_{g \in G} \sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} (x^{a\langle g \rangle/T1} - x^{g/T1})^2$$

avec

$$d1(A(\tilde{G})/T1) = \sum_{g \in G} d1(A(g)/T1) = \sum_{g \in G} (\text{card}(A\langle g \rangle) - 1)$$

4.4.2 Somme-des-carrés associée à la comparaison $A(\tilde{G}) \cdot W$

La condition d'orthogonalité est manifestement satisfaite pour le croisement G^*T , même si l'empoilement $A\langle G \rangle$ est non-équilibré. On a donc, en appliquant le lemme sur les propriétés de décomposition d'un croisement donné en 4.2.3:

$$W(A\langle G \rangle) = W/A\langle G \rangle \cdot A(g) \cdot W$$

et, puisque $W(A\langle G \rangle) = \sum_{a\langle g \rangle \in A\langle G \rangle} W(a\langle g \rangle)$, $s^c_{A(g) \cdot W} = \sum_{a\langle g \rangle \in A\langle G \rangle} s^c_{W(a\langle g \rangle)} - s^c_{W/A\langle G \rangle}$

Soit maintenant une matrice W à T lignes ($T = \text{card}(T1)$) et $d1(W)$ colonnes représentant la comparaison W telle que $W^*W = cI_{d1(W)}$ ($c > 0$); la comparaison $W/A\langle G \rangle$ est définie sur le support $a\langle g \rangle^*T$, auquel sont associés:

- le protocole $a\langle g \rangle^*T \mapsto x^{a\langle g \rangle t}$;
- la mesure fondamentale uniforme $a\langle g \rangle^*T \mapsto 1$.

On en déduit:

$$s^c_{W(a\langle g \rangle)} = s^c_{W/A\langle G \rangle} = \frac{1}{c} \sum_{x^{a\langle g \rangle^*T}} W^*W^* x^{a\langle g \rangle^*T}$$

où $x^{a\langle g \rangle^*T}$ est le vecteur colonne constitué par les $x^{a\langle g \rangle t}$.

La comparaison $W/A\langle G \rangle$ est pour sa part définie sur le support g^*T auquel sont

associés:

- le protocole dérivé $g^*T \mapsto x^{g^*t} = \frac{1}{\text{card}(A\langle g \rangle)} \sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} x^{a\langle g \rangle t}$;
- la mesure fondamentale uniforme $g^*T \mapsto \text{card}(A\langle g \rangle)$.

On en déduit:

$$s^c_{W/A\langle G \rangle} = \frac{1}{c} \text{card}(A\langle G \rangle) \sum_{g^*T} W^*W^* x^{g^*T}$$

où x^{g^*T} est le vecteur colonne constitué par les x^{g^*t} .

D'où:

$$s^c_{A(g) \cdot W} = \frac{1}{c} \sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} \sum_{x^{a\langle g \rangle^*T}} W^*W^* x^{a\langle g \rangle^*T} - \text{card}(A\langle g \rangle) \sum_{x^{g^*T}} W^*W^* x^{g^*T}$$

ce qui peut encore être écrit

$$\frac{1}{c} \text{tr} \left[\sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} W^* x^{a\langle g \rangle^*T} x^{a\langle g \rangle^*T^*} W - \text{card}(A\langle g \rangle) W^* x^{g^*T} x^{g^*T^*} W \right]$$

où "tr" désigne la trace de la matrice (somme des éléments diagonaux). D'où:

$$s^c_{A(\tilde{G}) \cdot W} = \frac{1}{c} \sum_{g \in G} \text{tr} \left[\sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} W^* x^{a\langle g \rangle^*T} x^{a\langle g \rangle^*T^*} W - \text{card}(A\langle g \rangle) W^* x^{g^*T} x^{g^*T^*} W \right]$$

$$d1(A(\tilde{G}) \cdot W) = \sum_{g \in G} d1(A(g) \cdot W) = \sum_{g \in G} (\text{card}(A\langle g \rangle) - 1) d1(W)$$

5 CARACTÉRISATION DE L'EFFET D'UN CONTRASTE, D'UNE COMPARAISON

Pour analyser descriptivement une comparaison, il s'agira d'abord de caractériser *numériquement* la grandeur de l'effet associé à cette comparaison pour le protocole à analyser. Une telle caractérisation semblera aller de soi dans certains cas; mais en général elle pourra soulever un certain nombre de difficultés. Notre propos n'est pas ici de discuter de ce que serait, cas par cas, la meilleure caractérisation possible: nous envisagerons simplement des solutions générales qui, comme on peut le voir dans la seconde partie de ce ouvrage sur des exemples, pourront s'appliquer en les particularisant dans les différents cas rencontrés.

* 5.1 PRELIMBLES: EFFET D'UN FACTEUR, GRANDEUR ET REPRESENTANT DE L'EFFET

Considérons un protocole, dérivé du protocole à analyser, $\mathfrak{X}_J = (x^j)_{j \in J}$ qui, à chaque modalité j , associe la moyenne de toutes les observations correspondant à cette modalité. Commençons par supposer, pour fixer les idées, que le support J de ce protocole est un facteur élémentaire et considérons la situation, à la fois exemplaire et familière, dans laquelle on s'intéresse à l'effet de ce facteur (ou encore, ce qui revient au même, à l'effet associé à la comparaison globale \mathfrak{J}).

Examinons l'effet observé du facteur J , c'est, intuitivement, comparer les valeurs x^j pour les différentes modalités j ; malheureusement, il n'est pas évident, en général, d'exprimer cette idée intuitive à l'aide de nombres.

5.1.1 Absence d'effet, grandeur de l'effet, représentant de l'effet

Il est cependant une notion qu'il est immédiat de traduire numériquement, c'est celle d'*absence d'effet*.

Absence d'effet d'un facteur - On dira que l'effet du facteur J est nul pour le protocole \mathfrak{X}_J si ce protocole est un protocole constant, ce qui peut notamment être caractérisé par l'une des deux propriétés: (i) toutes les valeurs x^j sont égales à la moyenne \bar{x} du protocole; (ii) les caractéristiques de dispersion de ce protocole, variance, somme-des-carrés, carré-moyen...., ont des valeurs nulles.

Indicateur de la grandeur de l'effet d'un facteur - On dira par conséquent que les caractéristiques précédentes de la dispersion du protocole \mathfrak{X}_J , ou encore toute quantité qui leur est proportionnelle, constituent des *indicateurs de la grandeur de l'effet observé du facteur J* .

En fait tout indicateur de la grandeur de l'effet ne pourra constituer qu'un résumé imparfait de cet effet, dès lors que celui-ci n'est pas nul. Il conviendra donc d'ajouter à la notion d'indicateur (numérique) de la grandeur de l'effet du facteur la notion de *représentant* (multinérique) dès que le facteur a au moins trois modalités) de l'effet du facteur.

Représentant de l'effet d'un facteur - L'effet du facteur J à $J-1$ degrés de liberté (en notant J pour $\text{card}(J)$); il peut donc être représenté par un $(J-1)$ -tuple de valeurs numériques; on dira par exemple que les $J-1$ différences $x^1 - x^2, x^2 - x^3, \dots, x^{J-1} - x^J$ constituent un représentant de l'effet observé du facteur J (en particulier les autres différences $x^j - x^k$ peuvent être calculées à partir de celles-ci). Plus généralement, si on se donne une base de la comparaison \mathfrak{J} , représentée par une matrice C (autrement dit $J-1$ contrastes sur J linéairement indépendants), le vecteur $C \cdot \mathfrak{X}_J$ sera un représentant de l'effet observé du facteur.

Nous allons maintenant préciser ces différentes notions, en distinguant le cas d'un facteur systématique à deux modalités, le cas d'un facteur systématique à plusieurs modalités et le cas d'un facteur de groupe.

5.1.2 Cas d'un facteur systématique à deux modalités

Dans le cas d'un facteur systématique à deux modalités, l'effet observé du facteur est nul si les moyennes observées pour chacune de ces deux modalités, soient x^1 et x^2 , sont égales. Dans ce cas l'une des deux différences $x^1 - x^2$ ou $x^2 - x^1$ (choisie pour des raisons de commodité) sera naturellement choisie comme représentant de l'effet observé du facteur. Ce choix s'impose de manière évidente, l'un des deux contrastes $(+1, -1)$ ou $(-1, +1)$ constituant une base privilégiée (on parlera de base canonique) de la comparaison \mathfrak{J} (à un degré de liberté); c'est pourquoi on dira dans ce cas que $x^1 - x^2$ (ou $x^2 - x^1$) est (et non seulement représente) l'effet (numérique) observé du facteur.

On choisira alors naturellement la valeur absolue $|x^1 - x^2|$ comme *indicateur de la grandeur de l'effet observé du facteur*. Pour bien saisir la distinction entre la notion d'effet et la notion de grandeur de l'effet, on peut penser à ce que serait l'extension au cas multivarié (x^1 et x^2 étant alors des vecteurs): l'un des vecteurs $x^1 - x^2$ ou $x^2 - x^1$ serait l'effet (multinérique) observé du facteur, tandis que la norme (la longueur) $|x^1 - x^2|$ de ces vecteurs serait seulement un indicateur (numérique) de la grandeur de cet effet.

En résumé, dans le cas d'un facteur systématique à deux modalités, on définira:

$$d = x^{-1}x^{-2} \text{ ou } x^{-2}x^{-1} \text{ effet observé du facteur}$$

$$1 = |x^{-1}x^{-2}| \text{ indicateur de la grandeur de l'effet observé}$$

On vérifiera aisément que:

$$1 = |d| = \left[\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{cm_{\mathbf{J}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

5.1.3 Cas d'un facteur systématique à plusieurs modalités

Choix d'un indicateur de la grandeur de l'effet - Dans le cas d'un facteur élémentaire à J modalités, il semblera souvent raisonnable (en tout cas, s'il n'y a pas de structure particulière sur J) de choisir un indicateur de la grandeur de l'effet qui, d'une certaine manière, soit homogène à la grandeur de l'effet de chaque facteur partiel à deux modalités. On peut donc chercher à construire cet indicateur à partir des $\frac{J(J-1)}{2}$ valeurs absolues des différences $x_j^i - x_j^{i''}$ ($j^i < j^{i''}$).

Dans le cas équilibré (égalité de tous les effectifs n_j), on pourra choisir, de manière assez raisonnable, la moyenne quadratique de ces différences comme indicateur de la grandeur de l'effet, soit:

$$1 = \left[\frac{\sum_{j^i < j^{i''}} (x_j^i - x_j^{i''})^2}{J(J-1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

En notant $n_j = \bar{n}$ la valeur commune des effectifs n_j , d'où $n = \sum n_j = J\bar{n}$, on déduit de la formule de la somme-des-carrés associée à la comparaison globale \mathbf{J} (cf 3.4.2):

$$1 = \left[\frac{\frac{\bar{n}}{J} sc_{\mathbf{J}}}{J(J-1)} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2cm_{\mathbf{J}}}{\bar{n}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Cet indicateur présente la propriété importante de ne pas dépendre de la pondération A_j (en fait ici de \bar{n}), mais seulement des valeurs observées x_j^i .

Dans le cas non équilibré, on pourra encore chercher à construire l'indicateur de la grandeur de l'effet à partir des $|x_j^i - x_j^{i''}|$. Une exigence minimum sera dans ce cas que cet indicateur ait la propriété de ne pas être modifié quand on multiplie tous les n_j par une même constante; on vérifie sans peine que cette exigence est remplie par la moyenne quadratique pondérée des différences définie par:

$$1 = \left[\frac{\sum_{j^i < j^{i''}} n_j^i n_j^{i''} (x_j^i - x_j^{i''})^2}{\sum_{j^i < j^{i''}} n_j^i n_j^{i''}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

On reconnaît au numérateur la quantité $n sc_{\mathbf{J}}$ (où n est la somme des n_j) et, en utilisant les égalités

$$\sum_{j^i < j^{i''}} n_j^i n_j^{i''} = n^2 = 2 \sum_{j^i < j^{i''}} n_j^i n_j^{i''} + \sum_j n_j^2$$

$$\text{Moy}(n_j) = \bar{n} = \frac{\sum_j n_j}{J} = \frac{n}{J} \text{ moyenne des } n_j$$

$$v_{\text{cor}}(n_j) = \frac{\sum_j n_j^2 - \frac{n^2}{J}}{J-1} \text{ variance-corrigée des } n_j$$

on déduit que le dénominateur peut être écrit sous la forme $\frac{J-1}{2} (\bar{n} - \frac{1}{n} v_{\text{cor}}(n_j))$, d'où finalement:

$$1 = \left[\frac{2cm_{\mathbf{J}}}{\bar{n} - \frac{1}{n} v_{\text{cor}}(n_j)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ce qui généralise la formule donnée dans le cas équilibré.

D'une manière générale, on admettra que l'on peut choisir un indicateur de la grandeur de l'effet observé d'un facteur systématique J qui soit de la forme:

$$1 = \left[\frac{cm_{\mathbf{J}}}{k} \right]^{\frac{1}{2}} \quad k > 0$$

Choix d'un représentant de l'effet - Dans le cas d'un facteur élémentaire J à trois modalités ou plus, il n'existe pas de décomposition privilégiée de l'effet (c'est-à-dire de base privilégiée de la comparaison globale sur J). Puisque le choix d'un représentant particulier de l'effet induira une décomposition partiellement arbitraire. En fait, pour des considérations techniques, il apparaîtra judicieux de choisir une base orthogonale de la comparaison \mathbf{J} , c'est-à-dire J-1 contrastes orthogonaux dans cette comparaison. Matriciellement cette contrainte s'exprime ainsi: si N_j est la matrice diagonale $J \times J$ dont les éléments diagonaux sont les coefficients n_j ; alors $C^1 N_j^{-1} C$ sera une matrice diagonale. Plus précisément, compte tenu du choix de l'indicateur de la grandeur de l'effet, il sera commode de choisir C telle que $C^1 N_j^{-1} C = \frac{1}{k} I_{J-1}$ ($k > 0$). Pour une telle matrice C, on définit alors:

$\parallel \mathbf{d} = \mathbf{C}^* \mathbf{x}^J$ représentant de l'effet observé du facteur;

Et on a simplement:

$$\parallel 1 = \left(\frac{\mathbf{d}^* \mathbf{d}}{J-1} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ pour l'indicateur de la grandeur de l'effet.}$$

Ceci se déduit immédiatement de la formule de la somme-des-carrés sc_J
 $= k \mathbf{x}^J \mathbf{C} \mathbf{C}^* \mathbf{x}^J = k \mathbf{d}^* \mathbf{d}$ et de $1 = \left(\frac{cm_J}{k} \right)^{\frac{1}{2}}$.

L'intérêt de ce choix est de faire apparaître la grandeur de l'effet observé du facteur J comme la moyenne quadratique des $J-1$ effets observés associés à chacun des $J-1$ contrastes choisis pour représenter l'effet: en notant respectivement ces effets d_1, \dots, d_{J-1} on a en effet:

$$1 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{J-1} d_i^2}{J-1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Bien entendu 1 ne dépend pas des contrastes particuliers choisis, ainsi que le montre sa caractérisation $1 = \left(\frac{cm_J}{k} \right)^{\frac{1}{2}}$.

5.1.4 Cas d'un facteur de groupe

Dans le cas où J est un facteur de groupe et où l'on suppose que tout facteur systématique du protocole \mathbf{x}^J est un facteur constant, la situation est relativement plus simple puisque:

- d'une part, compte tenu du statut de facteur de groupe de J , on ne s'intéressera pas à l'effet lui-même (on n'aura donc pas à choisir un représentant de l'effet), mais seulement à sa grandeur;
- d'autre part, dans la classe de plans $\underline{A} \langle G \rangle \times T$, la pondération associée à J sera nécessairement uniforme.

On pourrait envisager de procéder de la même manière que pour un facteur systématique (cas équilibré); en fait, suivant en cela une certaine tradition, nous préférons choisir un indicateur de la grandeur de l'effet qui soit dans ce cas homogène à un écart-type-corrigé, c'est-à-dire:

$$\parallel s = \left[\frac{\sum_{j \in J} (x_j^j - \bar{x})^2}{J-1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

qui a la propriété de ne pas dépendre de \bar{n} .

Dans ce cas encore l'indicateur de la grandeur de l'effet est proportionnel à la racine carrée du carré-moyen associé à la comparaison J , mais cette fois:

$$\parallel s = \left(\frac{cm_J}{\bar{n}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

au lieu de $1 = \left(\frac{2cm_J}{\bar{n}} \right)^{\frac{1}{2}}$ pour un facteur systématique

* 5.2 EFFET D'UN CONTRASTE, EFFET D'UNE COMPARAISON

Nous généraliserons maintenant ce qui vient d'être dit dans le cas de l'effet d'un facteur. Formellement, il conviendra de distinguer le cas de l'effet associé à un contraste (généralisation du cas d'un facteur à deux modalités) et le cas de l'effet associé à une comparaison à m degrés de liberté (généralisation du cas d'un facteur à un nombre quelconque de modalités).

5.2.1 Cas d'un contraste sur un support systématique J

Etant donné un contraste $\mathbf{c}_J = (c_j)_{j \in J}$ sur le support systématique J , on définit:

$$\parallel \mathbf{d} = \sum_{j \in J} c_j x_j^j \text{ effet observé du contraste}$$

$$\parallel 1 = \left| \mathbf{d} \right| = \left[\sum_{j \in J} \frac{c_j^2}{cm_J} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ indicateur de la grandeur de l'effet observé du contraste}$$

Ces définitions généralisent celles données dans le cas de l'effet d'un facteur systématique à deux modalités.

5.2.2 Cas d'une comparaison sur un support systématique J

Etant donné une comparaison \mathbb{C} , à m degrés de liberté, sur un support systématique J , on admettra que, comme dans le cas d'un facteur, on peut prendre comme indicateur de la grandeur de l'effet observé de la comparaison \mathbb{C} une quantité de la forme:

$$\parallel 1 = \left(\frac{cm_{\mathbb{C}}}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad k > 0$$

Pour le choix d'un représentant de l'effet, il sera ici encore commode de se donner une base orthogonale de la comparaison \mathbb{C} , représentée par une matrice \mathbf{C} , à J lignes et m colonnes, telle que $\mathbf{C}^* \mathbf{N}_J^{-1} \mathbf{C} = \frac{1}{k} \mathbf{I}_m$; on définit alors le représentant de l'effet observé de la comparaison \mathbb{C} :

$$\parallel \mathbf{d} = \mathbf{C}^* \mathbf{x}^J$$

et on a simplement:

$$\| 1 = \left(\frac{d'A}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(La démonstration se fait comme dans le cas d'un facteur)

Comme pour l'effet d'un facteur, l'apparaît ainsi comme la moyenne quadratique des m effets observés de chacun des m contrastes choisis pour représenter l'effet de la comparaison \mathcal{C} .

5.2.3 Cas d'une comparaison sur un support non systématique

Dans le cadre des plans $A \langle G \rangle * T$, ce cas correspond aux comparaisons (faisant intervenir le facteur de groupe \underline{A}) des types $A(\tilde{G})/T1$ et $A(\tilde{G}).W$.

Comme pour un facteur de groupe, seul se posera ici le problème du choix d'un indicateur de la grandeur de l'effet (et pas d'un représentant). On admettra dans ce cas encore de prendre un indicateur qui soit proportionnel à la racine carrée du carré-moyen associé à la comparaison considérée, et qui soit en outre homogène à un écart-type-corrigé, conformément au choix effectué pour un facteur de groupe.

* * *

CHAPITRE II

*

DISTRIBUTIONS UTILES

1 INTRODUCTION

* 1.1 DEFINITIONS GENERALES

Il s'agira essentiellement ici de traduire en termes abstraits un certain nombre de notions classiques généralement exprimées dans le langage probabiliste (l'emploi du langage probabiliste n'en sera ainsi que mieux réservé aux cas où il est clairement approprié).

1.1.1 Espace

Tous les espaces considérés sont des *espaces numériques* (\mathbb{R} ou une partie de \mathbb{R}) ou *multinumeriques* (\mathbb{R}^p ou une partie de \mathbb{R}^p); ces espaces seront toujours, sans que nous ayons à le préciser, considérés comme des *espaces mesurables*, munis de la tribu des *Boréliens* correspondante (ou de la trace de cette tribu). Donc, dans ce qui suit, "espace" signifiera "espace (numérique ou multinumérique) mesurable".

1.1.2 Mesure-normalisée

Etant donné un espace Y , une mesure positive μ sur Y telle que $\mu(Y) = 1$ sera appelée *mesure-normalisée*.

1.1.3 Transition

Etant donné deux espaces Y et Z , une *transition* de Y vers Z sera une application τ de $Y \times B(Z)$, où $B(Z)$ est la tribu de l'espace Z , dans $[0,1]$, telle que:

- (i) $(\forall y \in Y) \tau(y, \cdot)$ est une *mesure-normalisée* sur Z ;
- (ii) $(\forall Z' \in B(Z)) \tau(\cdot, Z')$ est une *application mesurable* de Y dans $[0,1]$.

1.1.4 Variable et distribution

Etant donné deux espaces Y et Z et une mesure-normalisée μ sur Y , une *variable* sera une application mesurable de Y dans Z ; la *distribution* d'une *variable* sera la mesure image de la mesure μ par l'application qui définit cette variable.

Si $Z = \mathbb{R}$, la variable sera dite *variable numérique*, et si $Z = \mathbb{R}^p$, elle sera dite *variable multinumérique* (ou *p-numérique*).

1.1.5 Equivalences formelles

D'un point de vue purement formel, on a les équivalences suivantes avec la terminologie du langage probabiliste:

Mesure-normalisée \dagger ProbabilitéTransition \dagger Transition de probabilitéVariable \dagger Variable aléatoire

1.1.6 Langage des variables et des distributions

Nous adopterons systématiquement le langage des variables et des distributions, en raison de son caractère naturel en statistique qui lui confère une grande commodité d'emploi liée à des notations simples et concrètes.

La clef de ce langage est le fait que toute mesure-normalisée peut être regardée comme la *distribution de la variable identique*: définir une mesure-normalisée sur l'espace Y revient à définir sa mesure image par l'application identique sur Y . Si y est la notation générique pour un élément de Y , la variable définie par l'application identique sera notée y en italique.

Ainsi, par exemple, définir une mesure-normalisée sur l'espace des probocoles numériques R^J (dont un élément est noté \mathbf{x}^J) revient à donner la distribution de la variable (multinumerique) \mathbf{x}^J ; définir une transition de l'espace Π (dont un élément est noté π) vers l'espace R^J revient à donner la distribution (conditionnelle) de la variable $\mathbf{x}^J | \pi$ pour tout π appartenant à Π ; etc.

Les outils mathématiques essentiels pour l'inférence seront donc ceux liés aux notions usuelles dans le cadre du langage des variables et des distributions: en particulier dépendance et indépendance de variables, distributions conditionnelles et distributions conjointes de plusieurs variables.

* 1.2 NOTATIONS

Nous reprendrons et généraliserons maintenant un certain nombre de notations, dont certaines ont déjà été introduites précédemment.

1.2.1 Notations générales pour les vecteurs, les matrices, les familles

Nous illustrerons ici ces notations en utilisant des indices supérieurs; bien entendu les mêmes règles de notations s'appliquent dans le cas d'indices inférieurs.

Vecteurs - Une notation du type \mathbf{u}^J (u en caractère gras, J majuscule) désignera le vecteur colonne dont les éléments sont les nombres réels u^j , j parcourant J ; s'il n'est pas nécessaire, l'indice J pourra être omis.

Matrices - Une notation du type $A^{J \times K}$ (A majuscule en caractère gras, J et K majuscules) désignera la matrice à $\text{card}(J)$ lignes et $\text{card}(K)$ colonnes dont les éléments sont les nombres réels a_{jk} , (j,k) parcourant $J \times K$; des

simplifications dans cette notation pourront être introduites, par exemple: A au lieu de $A^{J \times K}$, B^J au lieu de $B^{J \times J}$, etc.

Familles - Les familles seront notées avec des parenthèses, par exemple: $(u^j)_{j \in J}$ pour la famille des nombres réels u^j (qui pourra encore être notée \mathbf{u}^J comme le vecteur correspondant); $(v^k)_{k \in K}$ pour la famille de vecteurs v^k , k parcourant K ; etc.

1.2.2 Notations pour les variables et les distributions

Nous adopterons les règles suivantes.

Variables - Toutes les variables seront désignées par des lettres en caractère italique, par opposition aux valeurs prises par ces variables désignées de manière générique par la lettre droite correspondante; par exemple on aura la variable y prenant la valeur y .

Les règles générales de notations pour les vecteurs, les matrices et les familles s'étendent de manière évidente aux variables; on aura par exemple les variables vectorielles \mathbf{y} , \mathbf{x}^J , la variable matricielle Y , la famille de variables (numériques) $(y^j)_{j \in J}$, etc.

Variables conditionnelles - Le symbole " $|$ " sera utilisé pour les variables conditionnelles; par exemple on aura les variables conditionnelles $x^j | y$ (pour $x^j | y = y$), $\mathbf{x}^J | y, z$; etc.

Variables indépendantes - Le symbole " $\perp\!\!\!\perp$ " sera utilisé pour indiquer l'indépendance des variables; par exemple on écrira $x \perp\!\!\!\perp y$ pour signifier que les variables x et y sont indépendantes; on aura encore l'indépendance d'une famille de variables, par exemple $\perp\!\!\!\perp (x^j)_{j \in J}$, et l'indépendance conditionnelle, par exemple $x \perp\!\!\!\perp y | z$, $\perp\!\!\!\perp (x^j)_{j \in J} | y, z, t$; etc.

Densités - La densité de la variable y au point y sera notée simplement $f(y)$, pour $f(y=y)$ car dans le présent contexte il n'y aura pas d'ambiguïté. On aura encore les notations $f(y)$ pour la densité de la variable multinumérique \mathbf{y} , $f(y,t)$ pour la densité conjointe des variables y et t , $f(y|t)$ pour la densité de la distribution conditionnelle de la variable y étant donné la valeur t de la variable t ; etc.

Moments - Moy(y) et Var(y) désigneront respectivement la moyenne et la variance de la variable (numérique) y ; Moy(\mathbf{y}) et Cov(\mathbf{y}) désigneront la moyenne et la matrice des variances et covariances de la variable multinumérique \mathbf{y} ; etc.

Distributions - Le symbole " \sim " sera utilisé pour indiquer la distribution particulière d'une variable; par exemple on écrira $x \sim N(a, e^2)$, $y | z \sim zX^2$, etc. Dans ce cas l'expression à droite de \sim renverra à une distribution particulière.

* 1.3 DISTRIBUTIONS UTILISEES DANS L'ANALYSE BAYESIENNE DES COMPARAISONS

Ce chapitre sera précisément consacré à l'étude des distributions particulières qui interviennent dans l'Analyse Bayésienne des Comparaisons: distribution du t généralisé (classique en statistique bayésienne), distribution L' , distributions ψ^2 et ψ , distributions L^2 et L , distributions K' , K^2 et K .

Toutes ces distributions seront caractérisées comme mélange (c'est-à-dire moyenne pondérée) d'autres distributions usuelles, soit comme mélange de distributions normales, soit comme mélange de distributions du χ^2 -deux, soit encore, en réitérant le principe, comme mélange de distributions obtenues dans une première étape.

On trouvera une présentation d'ensemble de ces distributions dans Lecoutre (1982), ainsi que dans Lecoutre (1981) en ce qui concerne la distribution ψ^2 et dans Lecoutre et Rouanet (1981) en ce qui concerne les distributions L' et L^2 .

* 1.4 PLAN DU CHAPITRE

2 DISTRIBUTIONS DE BASE USUELLES.....	
2.1 Distribution normale.....	
2.2 Distribution du χ^2 -deux et distributions dérivées.....	
2.3 Distribution de Wishart.....	
2.4 Distribution du t non-centré.....	
2.5 Distribution du F non-centré.....	
3 DISTRIBUTIONS POUR L'ANALYSE BAYESIENNE DES COMPARAISONS.....	
3.1 Distributions caractérisées comme mélange de distributions normales unidimensionnelles.....	
3.2 Distributions caractérisées comme mélange de distributions normales multidimensionnelles.....	
3.3 Distributions caractérisées comme mélange de distributions du χ^2 -deux et distributions dérivées.....	
3.4 Distributions caractérisées comme mélange de distributions du t généralisé.....	
3.5 Distribution caractérisée comme mélange de distributions du ψ -deux.....	
4 DENSITES UTILISEES.....	
4.1 Formules de densités.....	
4.2 Remarques sur le calcul des densités (et des moments).....	

2 DISTRIBUTIONS DE BASE USUELLES

* 2.1 DISTRIBUTION NORMALE

2.1.1 Définition de la distribution normale unidimensionnelle

Si x est une variable numérique de densité

$$f(x) = \frac{1}{e\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2e^2}\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $e \in \mathbb{R}$, $e > 0$, alors on dit que x a la distribution normale de moyenne a et de variance e^2 (d'écart-type e). Nous noterons:

$$\| x \sim N(a, e^2)$$

2.1.2 Caractérisation de la distribution normale multidimensionnelle

Si x est une variable p -numérique telle que, pour tout vecteur (non nul) v à p lignes, la variable (numérique) $v^t x$ a une distribution normale, alors on dit que x a une distribution normale p -dimensionnelle. Sous ces hypothèses

Moy(x) et Cov(x) existent et, en les désignant respectivement par a et E , nous noterons:

$$\| x \sim N_p(a, E)$$

Si, en outre, la matrice E est de rang p (soit $\det(E) > 0$), alors x admet une densité, laquelle a la forme suivante:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det(E)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-a)^t E^{-1}(x-a)\right] \quad x \in \mathbb{R}^p$$

2.1.3 Propriétés

Parmi les propriétés classiques de la distribution normale, nous mentionnerons simplement celles-ci.

• Si $x \sim N_p(a, E)$ et si M est une matrice à m lignes et p colonnes ($m \leq p$), de rang m , alors:

$$Mx \sim N_m(Ma, MEM^t)$$

• En particulier, si $x \sim N(a, e^2)$ et si $y = cx + d$ ($c \neq 0$), alors:

$$y \sim N(ca + d, c^2 e^2)$$

• Donc, si $z \sim N(0, 1)$, alors:

$$x = a + ez \sim N(a, e^2)$$

• Si $y | x \sim N_p(x, D)$ et $x \sim N_p(a, E)$, alors:

$$\| y \sim N_p(a, D+E)$$

* 2.2 DISTRIBUTION DU KHI-DEUX ET DISTRIBUTIONS DERIVEES

2.2.1 Caractérisation de la distribution du khi-deux

Si $x \sim N_m(a, I_m)$, alors la variable numérique $x'x$ a la distribution du khi-deux à m degrés de liberté d'excentricité $a'a$. Soit $x^2 = x'x$ et $a^2 = a'a$, nous noterons:

$$\| x^2 \sim \chi_m^2(a^2)$$

2.2.2 Cas particulier: khi-deux centré

Si $a^2 = 0$, nous noterons $\chi_q^2(0)$, qui est la distribution du khi-deux centré à q degrés de liberté.

2.2.3 Lemme

Si $x \sim N_m(a, bI_m)$ ($b > 0$), alors $x'x \sim b\chi_m^2(\frac{a'a}{b})$

Preuve - On a $x/\sqrt{b} \sim N_m(a/\sqrt{b}, I_m)$, d'où, en appliquant la caractérisation donnée en 2.2.1, $x'x/b \sim \chi_m^2(a'a/b)$ et donc le résultat.

2.2.4 Distribution du khi

Si $x^2 \sim \chi_m^2(a^2)$, alors nous noterons la distribution de la variable positive x (distribution du khi):

$$\| x \sim \chi_m(a^2)$$

Symboliquement: $\chi_m(a^2) = (\chi_m^2(a^2))^{\frac{1}{2}}$

2.2.5 Distribution du phi-inverse

Si $x^2 \sim \chi_q^2$, alors nous noterons la distribution de la variable positive x/\sqrt{q} (distribution du phi-inverse):

$$\| \frac{x}{\sqrt{q}} \sim \phi_q^{-1}$$

Symboliquement: $\phi_q^{-1} = \left(\frac{\chi_q^2}{q}\right)^{-\frac{1}{2}}$

* 2.3 DISTRIBUTION DE WISHART

2.3.1 Caractérisation

Si $x_i \sim N_p(0, E)$, i variant de 1 à q ($q \leq 1$) et $\| (x_i)_{i=1, \dots, q}$, alors la variable matricielle $Y = \sum_{i=1}^q x_i x_i'$ a la distribution de Wishart p -dimensionnelle, à q degrés de liberté, de matrice de variances et covariances E . Nous noterons:

$$\| Y \sim W_{p;q}(E)$$

La distribution de Wishart généralise au cas multidimensionnel la distribution du khi-deux; notons qu'on définirait de la même manière la distribution de Wishart non-centrée à partir de variables x_i ayant une distribution normale de centre a .

2.3.2 Lemme

Nous énoncerons le lemme suivant, qui se déduit des propriétés classiques de la distribution de Wishart (cf Anderson, 1956, page 163).

Si $Y \sim W_{p;q}(sI_p)$ ($s > 0$), alors $\text{tr}(Y) \sim s\chi_{pq}^2$.

* 2.4 DISTRIBUTION DU t NON-CENTRE

2.4.1 Caractérisation usuelle

Si $u \sim N(a, 1)$ et $v^2 \sim \chi_q^2/q$ - soit, en définissant $y = 1/\sqrt{v^2}$, $y \sim \phi_q^{-1}$ - avec $u \perp\!\!\!\perp v^2$ ($u \perp\!\!\!\perp y$), alors $t = u/\sqrt{v^2} = uy$ a la distribution du t non-centré, à q degrés de liberté, d'excentricité a . Nous noterons:

$$\| t \sim t'_q(a)$$

2.4.2 Cas particulier: t centré

Dans le cas particulier $a = 0$, nous noterons t_q pour $t'_q(0)$; il s'agit de la distribution du t de Student usuelle, à q degrés de liberté.

* 2.5 DISTRIBUTION DU F NON-CENTRE

2.5.1 Caractérisation usuelle

Si $u^2 \sim \chi_m^2(a^2)/m$ et $v^2 \sim \chi_q^2/q$ avec $u^2 \perp\!\!\!\perp v^2$, alors $F = u^2/v^2$ a la distribution du F non-centré, à m et q degrés de liberté, d'excentricité a^2 . Nous noterons:

$$\| F \sim F'_{m,q}(a^2)$$

2.5.2 Cas particulier: F centré

Dans le cas particulier $a = 0$, nous noterons $F_{m,q}$ pour $F'_{m,q}(0)$; il s'agit de la distribution du F de Fisher-Snedecor usuelle, à m et q degrés de liberté.

2.5.3 Distribution $F_{m,q}^{-1}$

Si $x^2 \sim F_{m,q}$, alors nous noterons la distribution de la variable positive x :

$$x \sim F_{m,q}^{-1}$$

Symboliquement: $F_{m,q}^{-1} = \left(F_{m,q} \right)^{\frac{1}{2}}$

* *

3 DISTRIBUTIONS POUR L'ANALYSE BAYESIENNE DES COMPARAISONS

* 3.1 DISTRIBUTIONS CARACTERISEES COMME MELANGE DE DISTRIBUTIONS NORMALES UNIDIMENSIONNELLES

3.1.1 Distribution du t non-centré

On peut encore donner de la distribution du t non-centré la caractérisation suivante, comme mélange de distributions normales.

Si $x|y \sim N(ya, y^2)$ ($y > 0$) et $y \sim \phi_q^{-1}$, alors x a la distribution du t non-centré, à q degrés de liberté, d'excentricité a : $x \sim t'_q(a)$.

On vérifie aisément que cette caractérisation est équivalente à la caractérisation usuelle donnée en 2.4.1; en effet, si $x|y \sim N(ya, y^2)$ et $y \sim \phi_q^{-1}$, alors $x/y|y \sim N(a, 1)$ qui ne dépend plus de y , donc en définissant $u = x/y$ on a bien $u \sim N(a, 1)$, $y \sim \phi_q^{-1}$ et $x = uy \sim t'_q(a)$.

3.1.2 Distribution du t généralisé

Caractérisation - Si $x|y \sim N(a, y^2e^2)$ et $y \sim \phi_q^{-1}$, alors x a la distribution du t généralisé, à q degrés de liberté, de centre (moyenne) a et d'indice d'échelle e ($e > 0$). Nous noterons:

$$x \sim t_q(a, e^2)$$

Propriétés - On en déduit immédiatement les propriétés suivantes, écrites symboliquement.

- $t_q(0, 1) = t'_q(0) = t_q$
- $t_q(a, e^2) = at_q$
- Si $x|y \sim N(a, by^2)$ et $y \sim s\phi_q^{-1}$, alors $x \sim t_q(a, bs^2)$

(On remarquera que c'est par cette dernière propriété qu'on caractérise usuellement la distribution du t généralisé, comme une fonction affine du t centré)

3.1.3 Distribution L'

Caractérisation - Si $x|y \sim N(a/y, e^2)$ ($y > 0$) et $y \sim \phi_q^{-1}$, alors x a la distribution L' , à q degrés de liberté, de position a et d'échelle e ($e > 0$).

Nous noterons:

$$x \sim L'_q(a, e^2)$$

Propriétés - On en déduit immédiatement les propriétés suivantes, écrites symboliquement.

$$\bullet L'_q(0, e^2) = N(0, e^2)$$

$$\bullet L'_\infty(a, e^2) = N(a, e^2)$$

$$\bullet L'_q(a, e^2) = e^{t' \left(\frac{a}{e}, 1 \right)}$$

$$\bullet \text{Et, si } x|y \sim N\left(\frac{a}{y}, e^2\right) \text{ et } y \sim s\phi_q^{-1}, \text{ alors } x \sim L'_q\left(\frac{a}{s}, e^2\right)$$

* 3.2 DISTRIBUTIONS CARACTERISEES COMME MELANGE DE DISTRIBUTIONS NORMALES MULTIDIMENSIONNELLES

Il est immédiat d'obtenir les extensions multidimensionnelles des distributions précédentes; nous retiendrons ici les deux distributions suivantes.

3.2.1 Distribution du t généralisé multidimensionnelle

Caractérisation - Si $x|y \sim N_m(a, y^2 E)$ et $y \sim \phi_q^{-1}$, alors x a la distribution du t généralisé m -dimensionnelle, à q degrés de liberté, de centre a et de matrice de dispersion E . Nous noterons:

$$\| x \sim t_{m;q}(a, E)$$

Propriété - On en déduit immédiatement la propriété suivante.

$$\bullet \text{Si } x|y \sim N_m(a, by^2 I_m) \text{ et } y \sim s\phi_q^{-1}, \text{ alors } x \sim t_{m;q}(a, bs^2 I_m)$$

3.2.2 Distribution L' multidimensionnelle

Caractérisation - Si $x|y \sim N_m\left(\frac{a}{y}, e^2 I_m\right)$ ($y > 0$) et $y \sim \phi_q^{-1}$, alors x a la distribution L' m -dimensionnelle, à q degrés de liberté, de position a et de matrice d'échelle $e I_m$. Nous noterons:

$$\| x \sim L'_{m;q}(a, e^2 I_m)$$

Propriétés - On en déduit immédiatement les propriétés suivantes, écrites symboliquement.

$$\bullet L'_{m;q}(0, e^2 I_m) = N_m(0, e^2 I_m)$$

$$\bullet L'_{m;\infty}(a, e^2 I_m) = N_m(a, e^2 I_m)$$

$$\bullet L'_{m;q}(a, e^2 I_m) = e^{t' \left(\frac{a}{e}, I_m \right)}$$

$$\bullet \text{Et, si } x|y \sim N_m\left(\frac{a}{y}, e^2 I_m\right) \text{ et } y \sim s\phi_q^{-1}, \text{ alors } x \sim L'_{m;q}\left(\frac{a}{s}, e^2 I_m\right)$$

* 3.3 DISTRIBUTIONS CARACTERISEES COMME MELANGE DE DISTRIBUTIONS DU KHI-DEUX ET DISTRIBUTIONS DERIVEES

De la caractérisation de la distribution du khi-deux à partir de la distribution normale multidimensionnelle (cf 2.2.1), on déduit immédiatement les extensions suivantes des distributions précédentes.

3.3.1 Distribution du F non-centré

On peut encore donner de la distribution du F non-centré la caractérisation suivante, comme mélange de distributions du khi-deux non-centré.

Si $x^2|y \sim y^2 \chi_{m,m}^2(a^2)/m$ et $y \sim \phi_q^{-1}$, alors x^2 a la distribution du F non-centré, à m et q degrés de liberté, d'excentricité a^2 : $x^2 \sim F'_{m,q}(a^2)$.

On vérifie aisément que cette caractérisation est équivalente à la caractérisation usuelle donnée en 2.5.1; en effet, si $x^2|y \sim y^2 \chi_{m,m}^2(a^2)/m$ et $y \sim \phi_q^{-1}$, alors $x^2/y^2 | y \sim \chi_{m,m}^2(a^2)/m$ qui ne dépend plus de y , donc en définissant $u^2 = x^2/y^2$ et $v^2 = 1/y^2$ on a bien $u^2 \sim \chi_{m,m}^2(a^2)/m$, $v^2 \sim \chi_{m,q}^2/q$ et $u^2 \perp v^2$, d'où $x^2 = u^2/v^2 \sim F'_{m,q}(a^2)$.

3.3.2 Distribution du psi-deux

Caractérisation - Si $x^2|y \sim y^2 \chi_{m,m}^2(a^2/y^2)$ ($y > 0$) et $y \sim \phi_q^{-1}$, alors x^2 a la distribution du psi-deux, à m et q degrés de liberté, d'excentricité a^2 . Nous noterons:

$$\| x^2 \sim \psi_{m,q}^2(a^2)$$

Caractérisation équivalente - Si $x \sim t_{m;q}(a, I_m)$, alors x^2 a la distribution du psi-deux, à m et q degrés de liberté, d'excentricité a^2 . Soit $x^2 = x^2$ et $a^2 = a^2$: $x^2 \sim \psi_{m,q}^2(a^2)$.

Remarque - La distribution du psi-deux peut être rapprochée:

- d'une part de la distribution du t généralisé; elles peuvent être définies de manière analogue, la distribution du t généralisé comme mélange de distributions normales, la distribution du psi-deux comme mélange de distributions du khi-deux (première caractérisation);

- d'autre part de la distribution du khi-deux; elles peuvent être définies de manière analogue, la distribution du khi-deux à partir de la distribution normale multidimensionnelle, la distribution du psi-deux à partir de la distribution du t multidimensionnelle (deuxième caractérisation).

Symboliquement, on a le diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 N_m & \rightarrow & \chi_m^2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 t_{m;q} & \rightarrow & \psi_{m,q}^2
 \end{array}$$

Propriétés - On déduit immédiatement des caractérisations précédentes les propriétés suivantes, écrites symboliquement.

- $\psi_{m,q}^2(0) = mF'_{m,q}(0) = mF_{m,q}$
- $\psi_{m,\infty}^2(a^2) = \chi_m^2(a^2)$
- $e^2 \psi_{1,q}^2\left(\frac{a^2}{e^2}\right) = [t_q(a, e^2)]^2$
- Et, si $x \sim t_{m;q}(a, e^2 \mathbf{I}_m)$, alors $x'x \sim e^2 \psi_{m,q}^2\left(\frac{a' a}{e^2}\right)$

3.3.3 Distribution du psi

Si $x^2 \sim \psi_{m,q}^2(a^2)$, alors nous noterons la distribution de la variable positive x (distribution du psi):

$$\left\| x \sim \psi_{m,q}(a^2) \right.$$

Symboliquement: $\psi_{m,q}(a^2) = [\psi_{m,q}^2(a^2)]^{\frac{1}{2}}$

Propriétés - On déduit des propriétés de la distribution du psi-deux les propriétés suivantes, écrites symboliquement.

- $\psi_{m,q}(0) = \sqrt{mF_{m,q}^2}$
- $\psi_{m,\infty}(a^2) = \chi_m(a^2)$
- $e \psi_{1,q}\left(\frac{a^2}{e^2}\right) = |t_q(a, e^2)|$
- Si $x|y \sim cY \chi_{m,q}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)$ et $y \sim s \phi_q^{-1}$, alors $x \sim c \psi_{m,q}\left(\frac{a^2}{s^2}\right)$
- Et, si $x \sim t_{m;q}(a, e^2 \mathbf{I}_m)$, alors $(x'x)^{\frac{1}{2}} \sim e \psi_{m,q}\left(\frac{a' a}{e^2}\right)$

3.3.4 Distribution L^2

Caractérisation - Si $x^2|y \sim \chi_m^2(a^2/y^2)$ ($y > 0$) et $y \sim \phi_q^{-1}$, alors x^2 a la distribution L^2 , à m et q degrés de liberté, d'excentricité a^2 . Nous noterons:

$$\left\| x^2 \sim L_{m,q}^2(a^2) \right.$$

Propriétés - On en déduit immédiatement les propriétés suivantes, écrites symboliquement.

- $L_{m,q}^2(0) = \chi_m^2(0) = \chi_m^2$
- $L_{m,\infty}^2(a^2) = \chi_m^2(a^2)$
- Et, si $x \sim L'_{m;q}(a, e^2 \mathbf{I}_m)$, alors $x'x \sim e^2 L_{m,q}^2\left(\frac{a' a}{e^2}\right)$

3.3.5 Distribution L

Si $x^2 \sim L_{m,q}^2(a^2)$, alors nous noterons la distribution de la variable positive x (distribution L):

$$\left\| x \sim L_{m,q}(a^2) \right.$$

Symboliquement: $L_{m,q}(a^2) = [L_{m,q}^2(a^2)]^{\frac{1}{2}}$

Propriétés - On déduit des propriétés de la distribution L^2 les propriétés suivantes, écrites symboliquement.

- $L_{m,q}(0) = \chi_m(0) = \chi_m$
- $L_{m,\infty}(a^2) = \chi_m(a^2)$
- Si $x|y \sim c \chi_{m,q}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)$ et $y \sim s \phi_q^{-1}$, alors $x \sim c L_{m,q}\left(\frac{a^2}{s^2}\right)$
- Et, si $x \sim L'_{m;q}(a, e^2 \mathbf{I}_m)$, alors $(x'x)^{\frac{1}{2}} \sim e L_{m,q}\left(\frac{a' a}{e^2}\right)$

* 3.4 DISTRIBUTIONS CARACTERISEES COMME MELANGE DE DISTRIBUTIONS DU t GENERALISE

3.4.1 Distribution K'

Caractérisation - Si $x|y \sim t_{q'+q}''(ya, e^2 \frac{q'y^2+q''}{q'+q})$ ($y > 0$) et $y \sim F_{q',q}''$, alors x a la distribution K' , à q' et q'' degrés de liberté, de position a et d'échelle e ($e > 0$). Nous noterons:

$$\left\| x \sim K'_{q',q''}(a, e^2) \right.$$

Propriétés - On en déduit immédiatement les propriétés suivantes, écrites symboliquement.

- $K'_{q',q''}(0, e^2) = t_{q''}(0, e^2)$
- $K'_{q',q''}(a, e^2) = L'_{q',q''}(a, e^2)$
- $K'_{\infty,q''}(a, e^2) = t_{q''}(a, e^2)$

$$\bullet K'_{m,q'}(a, e^2) = e K'_{m,q'}\left(\frac{a}{e}, 1\right)$$

3.4.2 Distribution K' multidimensionnelle

Nous mentionnerons encore l'extension multidimensionnelle de la distribution précédente: si $x|y \sim t_{m,q',q''}(y a, e^2 \frac{q' y^2 + q''}{q' + q''} I_m)$ ($y > 0$) et $y \sim F_{q', q''}^{\frac{1}{2}}$, alors x a la distribution K' multidimensionnelle, à q' et q'' degrés de liberté, de position a et d'échelle $e I_m$. Nous noterons:

$$\parallel x \sim K'_{m,q',q''}(a, e^2 I_m)$$

Cette distribution a des propriétés analogues à celles de la distribution unidimensionnelle (cas particulier pour $m=1$) données en 3.4.1.

* 3.5 DISTRIBUTION CARACTERISEE COMME MELANGE DE DISTRIBUTIONS DU PSI-DEUX

3.5.1 Distribution K^2

Caractérisation - Si $x^2|y \sim \frac{q' y^2 + q''}{q' + q''} \psi_{m,q',q''}^2\left(\frac{q' + q''}{q' y^2 + q''} a^2 y^2\right)$ ($y > 0$) et $y \sim F_{q', q''}^{\frac{1}{2}}$, alors x^2 a la distribution K^2 , à m, q' et q'' degrés de liberté d'excentricité a^2 . Nous noterons:

$$\parallel x^2 \sim K^2_{m,q',q''}(a^2)$$

Propriétés - On en déduit immédiatement les propriétés suivantes, écrites symboliquement.

- $K^2_{m,q',q''}(0) = \psi_{m,q',q''}^2(0) = m F_{m,q''}$
- $K^2_{m,q',q''}(a^2) = L^2_{m,q',q''}(a^2)$
- $K^2_{m,\infty,q''}(a^2) = m F'_{m,q''}(a^2)$
- Et, si $x \sim K'_{m,q',q''}(a, e^2 I_m)$, alors $x^2 \sim e^2 K^2_{m,q',q''}\left(\frac{a^2}{e^2}\right)$

3.5.2 Distribution K

Si $x^2 \sim K^2_{m,q',q''}(a^2)$, alors nous noterons la distribution de la variable positive x (distribution K):

$$\parallel x \sim K_{m,q',q''}(a^2)$$

$$\text{Symboliquement: } K_{m,q',q''}(a^2) = \left(K^2_{m,q',q''}(a^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Propriétés - On déduit des propriétés de la distribution K^2 les propriétés suivantes, écrites symboliquement.

$$\bullet K_{m,q',q''}(0) = \psi_{m,q',q''}(0) = \sqrt{m} F_{m,q'}^{\frac{1}{2}}$$

$$\bullet K_{m,q',\infty}(a^2) = L_{m,q'}(a^2)$$

$$\bullet K_{m,\infty,q''}(a^2) = \sqrt{m} (F'_{m,q''}(a^2))^{\frac{1}{2}}$$

$$\bullet \text{ Si } x|y \sim c \left(\frac{q' y^2 + q''}{q' + q''}\right)^{\frac{1}{2}} \psi_{m,q',q''}\left(\frac{q' + q''}{q' y^2 + q''} \frac{a^2}{y^2}\right) \text{ et } y \sim s F_{q', q''}^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{alors } x \sim c K_{m,q',q''}\left(\frac{a^2}{s^2}\right)$$

$$\bullet \text{ Et, si } x \sim K'_{m,q',q''}(a, e^2 I_m), \text{ alors } (x^2)^{\frac{1}{2}} \sim e K_{m,q',q''}\left(\frac{a^2}{e^2}\right)$$

* *

4 DENSITES UTILES

L'étude détaillée des caractéristiques des distributions (en particulier moments et fonctions caractéristiques) n'entrera pas dans le cadre de cet ouvrage; nous nous limiterons ici à donner les densités des distributions qui interviendront dans les applications numériques et qu'il sera donc utile de figurer.

* 4.1 FORMULES DE DENSITES

Dans les formules ci-après la variable sera toujours désignée par x (il s'agit de distributions unidimensionnelles); nous donnerons dans chaque cas la densité au point x.

4.1.1 $N(a, e^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{e} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{e}\right)^2\right)$$

4.1.2 $t(a, e^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{q} \frac{\Gamma(\frac{q+1}{2})}{\Gamma(\frac{q}{2})} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{q} \left(\frac{x-a}{e}\right)^2\right)^{-\frac{q+1}{2}}$$

4.1.3 $sf^0_{q^{-1}}$

$$f(x) = 2 \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{q}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{q}{2})} \frac{1}{s} \left(\frac{s}{x}\right)^{q+1} \exp\left[-\frac{q}{2} \left(\frac{s}{x}\right)^2\right] \quad x > 0$$

4.1.4 $J'_q(a, e^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{q}{2})} \frac{1}{e} \frac{1}{(qe^2+a^2)^{\frac{q}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{e}\right)^2\right) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \Gamma\left(\frac{q+j}{2}\right) \left(\frac{2}{qe^2+a^2}\right)^{\frac{j}{2}} \left(\frac{x}{a}\right)^j$$

4.1.5 $eX_m(a^2)$

$$f(x) = 2^{1-\frac{m}{2}} \frac{1}{e} \left(\frac{x}{e}\right)^{m-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(a^2 + \left(\frac{x}{e}\right)^2\right)\right) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2}+j)} \left(\frac{a^2 x}{2e}\right)^{2j} \quad x > 0$$

4.1.6 $eU_{m,q}(a^2)$

$$f(x) = 2 \frac{q}{q^2} \frac{1}{\Gamma(\frac{q}{2})} \frac{1}{e} \left(\frac{x}{e}\right)^{m-1} \left(q+a^2 + \left(\frac{x}{e}\right)^2\right)^{-\frac{m+q}{2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \frac{\Gamma(\frac{m+q}{2}+2j)}{\Gamma(\frac{m}{2}+j)} \left[\frac{a^2 x}{q+a^2 + \left(\frac{x}{e}\right)^2}\right]^{2j} \quad x > 0$$

4.1.7 $sf^2_{q^{-1}, q''}$

$$f(x) = 2 \left(\frac{q''}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{e} \frac{\Gamma(\frac{q'+q''}{2})}{\Gamma(\frac{q'}{2}) \Gamma(\frac{q''}{2})} \frac{1}{s} \left(\frac{x}{s}\right)^{q'-1} \left[1 + \frac{q''}{\pi} \left(\frac{x}{s}\right)^2\right]^{-\frac{q'+q''}{2}} \quad x > 0$$

4.1.8 $eL_{m,q}(a^2)$

$$f(x) = 2^{1-\frac{m}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{q}{2})} \frac{1}{e} \frac{1}{(q+a^2)^{\frac{q}{2}}} \left(\frac{x}{e}\right)^{m-1} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{e}\right)^2\right] \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \frac{\Gamma(\frac{q}{2}+j)}{\Gamma(\frac{m}{2}+j)} \left[\frac{a^2 \left(\frac{x}{e}\right)^2}{2(q+a^2)}\right]^j \quad x > 0$$

4.1.9 $K'_{q', q''}(a, e^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{q''}{q'^2} \frac{1}{\Gamma(\frac{q'}{2}) \Gamma(\frac{q''}{2})} \frac{1}{e} \frac{1}{(q'e^2+a^2)^{\frac{q'}{2}}} \left(\frac{q''}{q'+\left(\frac{x}{e}\right)^2}\right)^{\frac{q''+1}{2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \Gamma\left(\frac{q'+j}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q''+j}{2}\right) \left[\frac{2a^2 x}{(q'e^2+a^2)(q''+\left(\frac{x}{e}\right)^2)}\right]^j$$

4.1.10 $eK_{m,q^1,q^2}(a^2)$

$$f(x) = 2 q^m \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(\frac{q^1}{2})\Gamma(\frac{q^2}{2})} e^{-\frac{x}{2}} m^{-1} \left(\frac{q^1}{q^1+a^2}\right)^{\frac{q^1}{2}} \left[\frac{q^2}{q^2+\frac{x}{2}}\right]^{\frac{m+q^2}{2}}$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \frac{\Gamma(\frac{q^1}{2}+j)\Gamma(\frac{m+q^2}{2}-j)}{\Gamma(\frac{m}{2}+j)} \left[\frac{a^2 \left(\frac{x}{2}\right)^2}{(q^1+a^2)(q^2+\frac{x}{2})} \right]^j$$

$x > 0$

* 4.2 REMARQUES SUR LE CALCUL DES DENSITES (ET DES MOMENTS)

4.2.1 Obtention des formules de densités

Les distributions introduites dans l'Analyse Bayésienne des Comparaisons étant définies comme mélanges de distributions usuelles (normale, khi-deux), leurs densités sont également le mélange des densités de ces distributions, puisque :

$$f(x) = \int f(x|y)f(y)dy$$

Nous ne donnerons pas ici les justifications des formules de densités précédentes; nous nous contenterons d'illustrer le principe de leur obtention sur un exemple particulier, celui de la distribution $L'_q(a, e^2)$

Densité de la distribution L'_q - Rappelons la caractérisation de cette distribution :

si $x|y \sim N(a/y, e^2)$ et $y \sim \phi_q^{-1}$, alors $x \sim L'_q(a, e^2)$

On a donc ici :

$$f(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{e} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-\frac{a}{y})^2}{e^2}\right]$$

$$f(y) = 2 \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{q}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{q}{2})} y^{-(q+1)} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{y}\right)^2\right]$$

On en déduit :

$$f(x,y) = f(x|y)f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{e} \frac{1}{\Gamma(\frac{q}{2})} 2 \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{q}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{y}\right)^2\right]$$

$$y^{-(q+1)} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{qe^2+a^2}{e^2 y^2}\right] \exp\left[-\frac{ax}{e^2 y}\right]$$

En écrivant $\exp\left(-\frac{ax}{e^2 y}\right)$ sous la forme de la série $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{ax}{e^2}\right)^j y^{-j}$, on obtient, en intervertissant les signes \int et L' :

$$f(x) = \int f(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{e} \frac{1}{\Gamma(\frac{q}{2})} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2\right] 2 \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{q}{2}}$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{ax}{e^2}\right)^j \int_0^{+\infty} y^{-(q+j+1)} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{qe^2+a^2}{e^2} y^{-2}\right] dy$$

Cette intégrale est classique (cf par exemple Box et Tiao, 1973, page 145) :

$$\int_0^{+\infty} y^{-(q+j+1)} \exp\left[-\frac{qe^2+a^2}{2e^2} y^{-2}\right] dy = \frac{1}{2} \left(\frac{qe^2+a^2}{2e^2}\right)^{-\frac{q+j}{2}} \Gamma\left(\frac{q+j}{2}\right)$$

On en déduit aisément, en réarrangeant les termes, la densité donnée en 4.1.4.

4.2.2 Remarque sur le calcul des moments

On notera encore que l'on peut également obtenir, suivant ce même principe de mélange, les moments des distributions introduites dans l'Analyse Bayésienne des Comparaisons; considérons toujours, à titre d'illustration, la distribution $L'_q(a, e^2)$.

On a la formule générale pour le moment d'ordre h :

$$\text{si } \text{Moy}(x^h|y) = g_h(y) \text{ (qui est une fonction de } y), \text{ alors}$$

$$\text{Moy}(x^h) = \text{Moy}(g_h(y))$$

Ainsi, par exemple, pour les deux premiers moments de $L'_q(a, e^2)$:

$$\text{Moy}(x|y) = \frac{a}{y}$$

$$\text{Moy}(x^2|y) = \left(\frac{a}{y}\right)^2 + e^2$$

qu'on déduit de $x|y \sim N(a/y, e^2)$, et par suite

$$\text{Moy}(x) = a \text{Moy}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\text{Moy}(x^2) = e^2 + a^2 \text{Moy}\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

De $y \sim \phi_q^{-1}$ on déduit alors $\frac{1}{y} \sim \frac{1}{q} \chi_q$ et $\frac{1}{y^2} \sim \frac{1}{q} \chi_q^2$, d'où (résultats classiques)

$$\text{Moy}\left(\frac{1}{y}\right) = \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \text{Moy}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 1$$

Finalement on obtient :

$$\text{Moy}(x) = \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}$$

$$\text{Moy}(x^2) = e^2 + a^2$$

dont en déduit encore

$$\text{Var}(x) = e^2 + a^2 - (\text{Moy}(x))^2$$

4.2.3 Calcul pratique des densités

Les densités des distributions t_q (avec le cas particulier $q \rightarrow +\infty$ qui donne la densité de la distribution $N(0,1)$) et ϕ_q^{-1} , qui ne dépendent que de la valeur de q , peuvent être aisément tabulées. Nous donnons en annexe de cet ouvrage des tables de densités qui permettent de figurer les distributions $N(a, e^2)$, $t_q(a, e^2)$ et $s\phi_q^{-1}$. Bien entendu, on peut également calculer ces densités à l'aide d'une calculatrice portable; cela sera d'autant plus commode avec une calculatrice programmable, puisque l'on évitera ainsi des calculs répétitifs.

Pour les autres distributions, la densité dépend de plusieurs valeurs et il ne serait guère économique (sinon envisageable) de la tabuler; il faut donc dans ce cas avoir recours à un programme qui pourra être réalisé sur un petit ordinateur ou sur une calculatrice suffisamment puissante.

Toutes les fonctions mathématiques qui interviennent dans ces densités sont usuelles: fonction exponentielle, fonction puissance et fonction gamma; de plus l'usage de cette dernière est limité aux cas $\Gamma(k)$ et $\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$ où k est un entier. Il nous suffira donc ici de rappeler la valeur de la fonction gamma dans ces deux cas particuliers:

$$\Gamma(k) = (k-1)! = (k-1)(k-2)\dots 1$$

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right)\dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Il conviendra cependant de se montrer très soigneux dans l'élaboration des algorithmes de calcul, en tenant compte notamment du fait que l'on peut être amené à manipuler des nombres très élevés; en outre le calcul des séries (non finies) réclamera une attention toute particulière (il faudra notamment décider du nombre de termes de la série à considérer). De fait le calcul de la densité et plus encore le calcul de la fonction de répartition nécessiteront le plus souvent une étude mathématique approfondie du problème si l'on

veut être assuré de la précision du résultat. On trouvera un exemple d'une telle étude, en ce qui concerne la distribution du psi-deux, dans Guigues (1982).

*
*
*

CHAPITRE III

*

L'INFERENCE SPECIFIQUE

pour la détermination de la vérité de la proposition p, il faut que la proposition q soit vraie.

Donc la logique des variations, telle qu'elle est présentée dans ce chapitre, est une logique de propositions p (dont on suppose que p est vraie) et de propositions q (dont on suppose que q est vraie) pour la

de la logique des variations, telle qu'elle est présentée dans ce chapitre, est une logique de propositions p (dont on suppose que p est vraie) et de propositions q (dont on suppose que q est vraie) pour la

1 INTRODUCTION

* 1.1 STRUCTURES STATISTIQUES

Les objets de base pour l'inférence sont les statistiques, les paramètres, le modèle d'échantillonnage et, en ce qui concerne le cadre bayésien, une distribution initiale.

1.1.1 Statistique sur un espace de protocoles

Etant donné un espace de protocoles (numériques ou multinumériques), une statistique (numérique si $k = 1$, multinumérique si $k > 1$) sera une application mesurable de cet espace dans \mathbb{R}^k ($k \geq 1$).

En adoptant cette définition, nous nous réservons la possibilité de définir une statistique au niveau descriptif, c'est-à-dire sans qu'il soit nécessaire de définir une mesure sur l'espace des protocoles; la statistique ainsi définie ne deviendra une variable que si, précisément, on définit une telle mesure (normalisée). Dans ce cas, si t par exemple désigne la valeur d'une statistique numérique ($t \in \mathbb{R}$), la variable correspondante sera notée t en italique; et il n'y a aucun inconvénient à noter également t la statistique (l'application mesurable), même si elle n'est pas une variable.

Comme exemples de statistiques précédemment définies, citons la moyenne d'un protocole numérique (\bar{x}), la somme-des-carrés d'un protocole numérique associée à une comparaison \mathcal{C} ($sc_{\mathcal{C}}$), l'effet observé d'un contraste (d), la grandeur de l'effet observé d'une comparaison (I) - toutes statistiques numériques - et encore, comme statistique multinumérique, le représentant de l'effet observé d'une comparaison (\mathcal{D})...

On notera que, si on se limite (comme nous le faisons ici) à l'analyse de données univariées, tous les protocoles multinumériques seront dérivés de protocoles numériques et que, en conséquence, toutes les statistiques pourront être définies, de manière primitive, sur un espace de protocoles numériques.

1.1.2 Modèle d'échantillonnage sur un espace de protocoles

Etant donné un espace de protocoles, numériques ou multinumériques, un modèle d'échantillonnage sur cet espace de protocoles sera la donnée d'un espace Π , dit espace des paramètres du modèle, et d'une transition de Π vers l'espace de protocoles considéré.

Dans le langage des variables, définir un modèle d'échantillonnage sur un espace de protocoles numériques \mathbb{R}^J revient donc, d'une part à se donner un espace de paramètres Π (dont un élément sera noté θ), et d'autre part à

définir la distribution - appelée *distribution d'échantillonnage* - de la famille de variables numériques $(x^j)_{j \in J} | \mathfrak{M}$, pour tout \mathfrak{M} appartenant à Π ; dans le cas d'un espace de protocoles multinumériques, on aura à définir la distribution d'une famille de variables multinumériques $(g^j)_{j \in J} | \mathfrak{M}$, pour tout \mathfrak{M} appartenant à Π .

1.1.3 Structures statistiques associées à un modèle d'échantillonnage

Structure statistique - Une *structure statistique* est un triplet $(U; \Theta; \tau)$, constitué par un espace U , appelé espace d'observation, un espace Θ , appelé espace de paramètres, et par une transition τ de Θ vers U .

Tout modèle d'échantillonnage sur un espace de protocoles constitue donc une structure statistique.

Par exemple, avec les notations précédentes, on aura pour un espace de protocoles numériques: $U = \mathbb{R}^J$, $\Theta = \Pi$ et la transition τ sera caractérisée par la distribution d'échantillonnage de la famille de variables $(x^j)_{j \in J} | \mathfrak{M}$; la structure statistique ainsi définie peut être notée:

$$(\mathbb{R}^J; \Theta; (x^j)_{j \in J} | \mathfrak{M})$$

Mais on remarquera que la seule écriture $(x^j)_{j \in J} | \mathfrak{M}$ exprime, par défaut, cette structure statistique.

Structures statistiques dérivées - À partir d'une structure statistique, on pourra définir des *structures statistiques dérivées*.

Ainsi, on aura par exemple:

- si, à tout protocole \mathfrak{x}^J de \mathbb{R}^J est associé le protocole dérivé \mathfrak{x}^K de \mathbb{R}^K , la structure dérivée

$$(\mathbb{R}^K; \Pi; (x^k)_{k \in K} | \mathfrak{M})$$

- si \bar{x} est la statistique "moyenne d'un protocole de \mathbb{R}^n ", la structure dérivée

$$(\mathbb{R}; \Pi; \bar{x} | \mathfrak{M})$$

En outre, si dans les exemples précédents la distribution d'échantillonnage de la famille de variables $(x^k)_{k \in K}$ ou celle de la statistique \bar{x} ne fait pas intervenir tous les paramètres du modèle, mais ne dépend effectivement que de \mathfrak{M}' (à valeur dans un espace Π'), on aura encore les structures statistiques dérivées:

$$(\mathbb{R}^K; \Pi'; (x^k)_{k \in K} | \mathfrak{M}')$$

$$(\mathbb{R}; \Pi'; \bar{x} | \mathfrak{M}')$$

Etc.

1.1.4 Problème statistique bayésien - Distribution initiale

Un *problème statistique bayésien* (ou encore *structure statistique bayésienne*) sera un quadruplet $(U; \Theta; \tau; \nu)$ constitué par la donnée d'une structure statistique $(U; \Theta; \tau)$ et par le choix d'une mesure-normalisée ν sur Θ .

Choisir une mesure-normalisée ν sur Θ revient à choisir une distribution, appelée *distribution initiale*, pour la variable \mathfrak{M} .

À un modèle d'échantillonnage donné, pourront correspondre différents types de problèmes statistiques bayésiens, en particulier pour l'exemple précédent:

$$(\mathbb{R}^J; \Pi; (x^j)_{j \in J} | \mathfrak{M}; \mathfrak{M})$$

$$(\mathbb{R}^K; \Pi; (x^k)_{k \in K} | \mathfrak{M}; \mathfrak{M})$$

$$(\mathbb{R}; \Pi; \bar{x} | \mathfrak{M}; \mathfrak{M})$$

$$(\mathbb{R}; \Pi'; \bar{x} | \mathfrak{M}'; \mathfrak{M}')$$

etc.

1.1.5 Solution d'un problème statistique bayésien: formule de Bayes - Distribution finale, distribution prédictive

La donnée d'un problème statistique bayésien $(U; \Theta; \tau; \nu)$ détermine une mesure-normalisée sur l'espace produit $U \times \Theta$. Cette mesure, qui a été caractérisée par la donnée de la transition τ et de la mesure initiale ν , peut (de manière symétrique) être également caractérisée par une transition de U vers Θ et par une mesure-normalisée sur U , qui constitueront la *solution du problème statistique bayésien*.

Distribution finale, distribution prédictive - Dans le langage des variables, la solution du problème statistique bayésien comportera donc:

- d'une part la distribution, appelée *distribution finale*, de la variable \mathfrak{M} , pour tout \mathfrak{M} appartenant à U ;

- d'autre part la distribution (marginale), appelée *distribution prédictive*, de la variable \mathfrak{M} .

Formule de Bayes - Dans le cas où les variables (numériques ou multinumériques) considérées admettent une densité, la distribution finale est donnée par sa densité, qui se déduit de la densité de la distribution d'échantillonnage (distribution de la variable $\mathfrak{M} | \Theta$) et de la densité de la distribution initiale (distribution de la variable Θ) par la *formule de Bayes*:

$$f(\theta|u) = \frac{f(u|\theta)f(\theta)}{\int_{\theta} f(u|\theta)f(\theta)d\theta}$$

où le dénominateur n'est autre que la densité de la distribution prédictive :

$$f(u) = \int_{\theta} f(u|\theta)f(\theta)d\theta = \int_{\theta} f(u|\theta)f(\theta)d\theta$$

Si on remarque que $f(u)$, qui ne dépend pas de θ bien entendu, joue le rôle d'une constante dans la densité $f(\theta|u)$, celle-ci peut encore être écrite sous la forme :

$$f(\theta|u) = cf(u|\theta)f(\theta)$$

ce que nous écrirons encore

$$f(\theta|u) \propto f(u|\theta)f(\theta)$$

En pratique, il suffira donc, pour déterminer la densité de la distribution finale, de calculer le terme en θ de l'expression $f(u|\theta)f(\theta)$ - produit de la densité d'échantillonnage et de la densité initiale - puis d'identifier le terme en θ de la densité d'une distribution connue (si, bien entendu, la distribution finale est d'un type connu); on pourra ainsi éviter tout recours au calcul intégral.

* 1.2 EFFET THEORIQUE D'UN CONTRASTE, D'UNE COMPARAISON

Ayant caractérisé l'effet associé à un contraste ou à une comparaison pour le protocole à analyser (effet observé), il s'agit encore, dans une perspective inductive, de caractériser l'effet théorique associé à ce contraste ou à cette comparaison. L'effet théorique sera caractérisé, suivant les différents cas envisagés, non plus à partir des valeurs observées, mais à partir des valeurs, elles-mêmes qualifiées de théoriques, qui, dans l'inférence, seront des paramètres (éventuellement dérivés) du modèle d'échantillonnage.

1.2.1 Cas d'un contraste sur un support systématique J

Etant donné un contraste $c_j = (c_j)_{j \in J}$ sur le support systématique J, la caractérisation numérique de l'effet théorique ne soulèvera pas de problème particulier.

On définit, de manière analogue à la caractérisation de l'effet observé :

$$\begin{cases} \delta = \sum_{j \in J} c_j \mu_j^j & \text{effet théorique du contraste} \\ \lambda = |\delta| & \text{indicateur de la grandeur de l'effet théorique} \end{cases}$$

où les μ_j^j sont les moyennes théoriques associées à chaque modalité j.

Absence d'effet, effet négligeable, effet notable - Dans la perspective inductive, la notion d'absence d'effet du contraste se traduira, de manière évidente, par l'une des deux égalités $\delta = 0$ ou $\lambda = 0$ qui, dans le test de signification usuel, correspondra à l'hypothèse nulle (d'absence d'effet).

La notion d'effet négligeable du contraste se traduira pour sa part, de manière assez naturelle, par une inégalité du type $\lambda = |\delta| < \epsilon$, où ϵ est tel qu'un effet de grandeur ϵ est tenu pour négligeable (dans un certain contexte, bien entendu).

En revanche, la notion d'effet notable (ou important) devra être précisée. On pourrait évidemment envisager de traduire cette notion par une inégalité du type $\lambda = |\delta| > \zeta$, où ζ est tel qu'un effet de grandeur ζ est tenu pour notable (dans un certain contexte); mais il est bien clair qu'une telle inégalité est peu intéressante, et même très peu informative, si on n'est pas en mesure de préciser le sens de l'effet, c'est-à-dire de préciser si on a $\delta > 0$ ou $\delta < 0$. La notion utile est donc en fait la notion d'effet notable dans un certain sens, et, tout particulièrement, dans la perspective fiducio-bayésienne, la notion d'effet notable dans le sens de l'effet observé, ce qui se traduira alors par une inégalité du type $\delta > \zeta$ (si $d > 0$) ou $\delta < -\zeta$ (si $d < 0$).

1.2.2 Cas d'une comparaison sur un support systématique J

Compte tenu de la discussion précédente sur la notion d'effet notable, la caractérisation numérique de l'effet théorique dans le cas d'une comparaison c , à m degrés de liberté, sur le support J, soulèvera un problème nouveau. On définit d'abord, de manière analogue à la caractérisation de l'effet observé :

$$\begin{cases} \delta = c^t \mu^j & \text{représentant de l'effet théorique de la comparaison } c \\ \lambda = \left(\frac{\delta^t \delta}{m} \right)^{\frac{1}{2}} & \text{indicateur de la grandeur de l'effet théorique} \end{cases}$$

où c est la matrice à J lignes et m colonnes qui a permis de caractériser l'effet observé et où μ^j est le vecteur des moyennes théoriques μ_j^j associées à chaque modalité j.

λ apparaît ainsi comme la moyenne quadratique des m effets théoriques de chacun des m contrastes choisis pour représenter l'effet de la comparaison c (mais il ne dépend pas des contrastes particuliers choisis).

Absence d'effet, effet négligeable, effet notable - Dans la perspective inductive, la notion d'absence d'effet de la comparaison se traduira, de manière évidente, par l'égalité $\lambda = 0$ qui, dans le test de signification usuel,

correspondra à l'hypothèse nulle (d'absence d'effet). La notion d'effet négligible de la comparaison se traduira ici encore, de manière assez naturelle, par une inégalité du type $\lambda < \epsilon$, où ϵ est tel qu'un effet de grandeur ϵ est tenu pour négligeable (dans un certain contexte). Mais cette fois, la notion d'effet notable dans un certain sens (pour $m = 1$) ne pourrait, en tout état de cause, pour un effet multidimensionnel ($m > 1$), qu'être étendue à la notion d'effet notable "dans une certaine direction"; mais il apparaît assez problématique de formaliser cette dernière notion de manière à aboutir à des procédures inférentielles utiles.

Écart relatif de l'effet théorique par rapport à l'effet observé - La discussion précédente signifie qu'il faut aborder avec prudence la notion d'effet notable pour une comparaison à plusieurs degrés de liberté et qu'on devra le plus souvent, en pratique, recourir à des solutions indirectes. C'est ainsi qu'une notion utile pourra être celle d'écart relatif de l'effet par rapport à un effet donné. En particulier, dans la perspective fiducio-bayésienne, on définira:

- Le représentant de l'écart relatif de l'effet théorique par rapport à l'effet observé, comme la différence $\delta-d$ des représentants de ces effets;

- l'indicateur de la grandeur de cet écart relatif comme:

$$\xi_d = \frac{(\delta-d) \cdot (\delta-d)}{m}$$

ξ_d apparaît ainsi comme la moyenne quadratique des m différences entre l'effet théorique et l'effet observé de chacun des m contrastes choisis pour représenter l'effet de la comparaison \mathbf{C} (mais il ne dépend pas des contrastes particuliers choisis).

Remarque importante dans la pratique, le lien avec le test de signification sera assuré par le fait que l'hypothèse nulle $\lambda = 0$ peut encore s'écrire $\xi_d = 1$ (grandeur de l'effet observé):

$$\lambda = 0 \Leftrightarrow \xi_d = 1$$

On gardera bien entendu à l'esprit le fait que la notion d'écart relatif de l'effet apparaît en tout état de cause plus forte que celle de "direction de l'effet". Il suffira, pour s'en convaincre, de considérer le cas particulier $m = 1$, où l'on a alors simplement $\xi_d = |\delta-d|$; dans ce cas, en supposant pour fixer les idées $d > 0$, l'énoncé $\xi_d < d$ par exemple implique que δ va dans le même sens que d (c'est-à-dire $\delta > 0$), mais il implique encore que δ n'est pas supérieur à $2d$, ce qui n'est évidemment pas contenu dans la notion d'effet "allant dans le sens de d ", que l'on entend simplement comme signifiant $\delta > 0$.

1.2.3 Cas d'une comparaison sur un support non systématique

Rappelons que, dans le cadre des plans $A_{K < G > T}$, ce cas correspond aux comparaisons des types $A(\hat{G})/T_1$ et $A(\hat{G}).W$. L'indicateur de la grandeur de l'effet théorique associé à ces comparaisons sera une quantité σ , homogène à un écart-type, qui sera un paramètre (éventuellement dérivé) du modèle d'échantillonnage.

* 1.3 PLAN DU CHAPITRE

2 METHODES D'INFERENCE SPECIFIQUE.....

2.1 Inférence générale et inférence spécifique.....

2.2 Caractérisation d'une inférence bayésienne spécifique.....

2.3 Comment justifier une inférence spécifique?.....

2.4 Vers des solutions effectives simples.....

3 UNE STRUCTURE STATISTIQUE REMARQUABLE:

LA STRUCTURE "MULTINOMIALE - KHI-DEUX".....

3.1 Définition du problème.....

3.2 Test de l'hypothèse nulle $\lambda = 0$

3.3 Procédures fiducio-bayésiennes.....

3.4 Distributions prédictives (fiducio-bayésiennes).....

3.5 Procédures bayésiennes: cas d'une distribution initiale de la même famille que la distribution fiducio-bayésienne.....

4 RECAPITULATIF DES RESULTATS ESSENTIELS POUR LA PRATIQUE.....

4.1 Procédures fiducio-bayésiennes: si vous savez faire un test de signification.....

4.2 Procédures bayésiennes: si vous savez utiliser les procédures fiducio-bayésiennes.....

* * *

* 2.1 INFERENCE GENERALE ET INFERENCE SPECIFIQUE

2.1.1 L'approche du modèle général et ses difficultés

Dans l'analyse de la variance classique les inférences sont effectuées par l'intermédiaire de ce qu'on appelle un *modèle général*, c'est-à-dire un modèle d'échantillonnage posé sur les données de base (ici sur le protocole à analyser); on évoquera à ce propos le concept bien connu de *modèle linéaire de l'analyse de la variance* (ou de la *régression*), si souvent posé au début des analyses classiques. En utilisant cette approche, des procédures bayésiennes peuvent être définies de la manière suivante: on choisit une distribution initiale relative à l'espace de tous les paramètres du modèle général et on en dérive une distribution finale relative à ce même espace; ensuite, pour chaque effet auquel on s'intéresse, on dérive de cette distribution la distribution (marginale) pour le paramètre pertinent. Des techniques bayésiennes ont pu de cette manière être élaborées pour un certain nombre de plans d'expérience usuels (cf notamment Box et Tiao, 1973).

Mais cette approche du modèle général, en prenant le problème de front, se heurte à des difficultés considérables. Dès que le plan d'analyse est un tant soit peu complexe, une inférence générale fait intervenir un nombre considérable de paramètres et, outre la lourdeur des calculs qui ne manque pas d'en résulter, soulève une difficulté majeure: choisir une distribution initiale convenable relativement à un très grand nombre de paramètres.

Ainsi, pour un plan du type $\Delta \langle G \rangle * T$, la généralisation directe du modèle linéaire normal usuel met en jeu comme paramètres, outre les moyennes et variances relatives à chaque traitement, pour chaque groupe, toutes les covariances entre les paires de traitements à l'intérieur de chaque groupe. On pourrait bien entendu envisager le recours systématique à des distributions initiales *non-informatives* (cf notamment sur ce concept Jeffreys (1961), Lindley (1965), Box et Tiao (1973)), c'est-à-dire visant à traduire un état d'ignorance initial vis-à-vis des paramètres; mais c'est précisément dans le cas où le nombre de paramètres est très élevé que l'usage aveugle des distributions non-informatives a été le plus critiqué. En tout état de cause, les distributions finales auxquelles on aboutirait ainsi risqueraient fort d'être trop dispersées pour fournir des résultats utiles (de même que, sous ce même modèle, on aboutit à un test de signification, le F^2 de Hotelling, notoirement connu pour sa faible puissance).

Il existe cependant une manière de tourner la difficulté précédente: elle consiste à imposer au modèle linéaire de l'analyse de la variance des

spécifications qui ramèneront les paramètres à un nombre plus raisonnable. Ainsi, pour un plan du type $\Delta \langle G \rangle * T$, on pose couramment la condition dite de "symétrie", qui suppose qu'à l'intérieur de chaque groupe les variances sont égales pour toutes les paires de traitements. Cette solution a été développée notamment par Scheffé (1959) et conduit à des tests plus puissants que le F^2 de Hotelling; elle a été reprise par Box et Tiao (1973) dans le cadre bayésien. D'un autre point de vue, ces spécifications du modèle linéaire reviennent à imposer autant de contraintes sur la distribution initiale relative à l'ensemble des paramètres de ce modèle; d'une certaine façon cette solution s'oppose donc à celle qui consisterait à utiliser d'une manière systématique des distributions initiales non-informatives.

En tout état de cause, quel que soit le point de vue que l'on adopte, les conditions ainsi imposées apparaîtront le plus souvent largement arbitraires, voire irréalistes; il sera en tout cas difficile d'en apprécier la plausibilité. Bien plus, dès que l'on aura le moindre doute sur ces conditions, on sera amené à douter de toutes les inférences qui pourront être faites. Finalement, en cherchant à tourner la difficulté, on n'a fait que la déplacer.

2.1.2 L'approche de l'inférence spécifique

Par ailleurs, on sait que, si on se limite à une inférence sur un paramètre particulier, on peut dans la plupart des cas trouver des conditions beaucoup plus faibles qui suffisent à assurer la validité de cette inférence. Par exemple, dans un plan $\Delta * T$, toute comparaison à un degré de liberté peut être analysée sans faire aucune supposition que ce soit sur les variances et covariances. Or, dans l'Analyse Bayésienne des Comparaisons, on est précisément intéressé à des inférences relatives à des effets considérés séparément, et non pas à une inférence simultanée sur tous les paramètres d'un modèle général. Dans cette situation les conditions de validité (globale) du modèle général apparaissent tout simplement non pertinentes au problème; cette idée est au coeur de l'approche de l'*inférence spécifique*.

Pour chaque comparaison à analyser on effectuera une *inférence spécifique* que définie avec soin. Plus précisément chaque inférence spécifique portera sur un paramètre choisi pour traduire l'effet théorique (ou au moins la grandeur de l'effet) associé à la comparaison analysée. Ce qui caractérisera une inférence spécifique par rapport à une inférence générale est, d'une part qu'on se limitera à un très petit nombre de paramètres, d'autre part qu'on sera prêt à admettre de ne retenir qu'une partie des observations (un protocole dérivé *pertinent*) pour fonder l'inférence sur ces paramètres. Les avantages d'une telle approche seront, d'une part de pouvoir choisir une

distribution initiale raisonnable, d'autre part de n'avoir le plus souvent à poser qu'un *modèle spécifique* (sur le protocole dérivé pertinent) qui pourra être tout à fait réaliste.

* 2.2 CARACTERISATION D'UNE INFERENCE BAYESIENNE SPECIFIQUE

2.2.1 Caractérisation formelle

Une inférence bayésienne spécifique peut être caractérisée de la manière suivante.

(1) Chacune des comparaisons à analyser est considérée séparément. A une comparaison donnée on associe, d'une part le représentant de l'effet observé de cette comparaison, désigné par d , d'autre part le représentant de l'effet théorique de cette comparaison, désigné par δ (dans le cas d'un contraste, d et δ sont simplement l'effet observé et l'effet théorique du contraste).

(2) Pour chaque comparaison on recherche un *protocole pertinent*, dérivé du protocole à analyser (avec, comme cas limite, ce protocole lui-même); ce protocole pertinent, à partir duquel on peut bien entendu calculer la valeur d , constitue les données de base pour l'inférence spécifique.

(3) Sur le protocole pertinent on pose un modèle d'échantillonnage - appelé *modèle spécifique d'échantillonnage* - qui comporte un nombre relativement réduit de paramètres, à partir desquels on peut bien entendu définir le paramètre (éventuellement dérivé) δ . Sous ce modèle la distribution d'échantillonnage de la statistique d ne dépend que de δ et d'un très petit nombre de paramètres secondaires; en fait, dans les situations considérées dans cet ouvrage, la distribution d'échantillonnage de d ne dépendra que de δ et d'un seul paramètre secondaire σ , et on définira alors une statistique s dont la distribution d'échantillonnage ne dépendra pour sa part que de σ .

(4) On choisit une *distribution initiale* relative aux paramètres intervenant dans la distribution d'échantillonnage de d , c'est-à-dire ici δ et σ .

(5) On en déduit la *distribution finale* relative au couple (δ, σ) , étant donné d et s , puis les distributions marginales et éventuellement les distributions relatives à des paramètres dérivés.

2.2.2 Exemple

Considérons à titre d'exemple le cas d'un plan $S \times T$ avec $T = \{t_1, t_2\}$: à chaque sujet s (appartenant à S) correspondent deux observations, une pour chacun des deux traitements t_1 et t_2 ; supposons que la question que l'on se pose porte sur la différence entre les deux traitements.

(1) Définissons la différence (moyenne) observée d et la différence théorique δ .

(2) Comme protocole dérivé pertinent, considérons le *protocole des différences* qui, à chaque sujet s , associe la différence entre la valeur observée x_{st_1} pour le traitement t_1 et la valeur observée x_{st_2} pour le traitement t_2 ; d n'est autre que la moyenne de ce protocole des différences.

(3) Pour ce protocole dérivé des différences, posons le *modèle normal* (unidimensionnel) classique qui ne comporte que deux paramètres, δ et σ (moyenne et écart-type). Sous ce modèle la distribution d'échantillonnage de la statistique d est une distribution normale de moyenne δ (et dont la variance est proportionnelle à σ^2); prenons pour statistique s l'écart-type-corrigé du protocole des différences (considéré comme non pondéré); la distribution d'échantillonnage de s^2 est une distribution du *khi-deux* qui ne dépend que de σ et est indépendante de celle de d . On rencontre là la notion de *structure statistique spécifique "normale-khi-deux"*: en fait on est tout simplement ramené au problème classique de l'inférence sur une moyenne sous le modèle normal.

(4) Les solutions bayésiennes pour l'inférence sur une moyenne s appliquent donc: on choisit une distribution initiale relative aux paramètres δ et σ ...

(5) ... et on en déduit la distribution finale conjointe relative à ces paramètres; on peut alors obtenir les distributions finales marginales relatives à chacun des paramètres δ et σ , ou encore la distribution relative au rapport $\frac{\delta}{\sigma}$.

2.2.3 Avantages de l'inférence spécifique

A partir de cet exemple très simple d'inférence bayésienne spécifique, nous pouvons mettre en avant les avantages de l'inférence spécifique.

Dans le cas présent une inférence générale aurait par exemple consisté à poser le modèle normal à deux dimensions pour le plan $S \times T$ (avec card(T) = 2), dont le modèle spécifique précédent est dérivé. Ce modèle comporte cinq paramètres et il aurait fallu choisir une distribution initiale relative à ces cinq paramètres. Sans doute ici la réduction du nombre de paramètres, de cinq pour le modèle général à deux pour le modèle spécifique, n'est elle pas considérable; mais si nous envisageons la situation courante où la question posée porte toujours sur la comparaison de deux traitements, mais dans le cadre d'un plan complexe (avec un grand nombre de traitements), le modèle spécifique comportera toujours seulement deux paramètres, alors que le modèle général pourra devenir inextricable (à moins de suppositions arbitraires).

En fait, quelle que soit la complexité du plan d'analyse, chaque inférence spécifique conservera le même degré relatif de simplicité et restera

donc, toutes proportions gardées, élémentaire.

Par ailleurs le modèle spécifique pourra être tout à fait réaliste dans des situations où le modèle général usuel est tout à fait irréaliste. Par exemple, pour le cas de la comparaison des deux traitements, il arrive couramment que la distribution des différences apparaisse comme sensiblement normale, alors que chacune des distributions marginales relative à chacun des traitements est éloignée de la forme normale (par exemple est nettement asymétrique). Dans ce cas le modèle normal bidimensionnel n'apparaîtrait même plus acceptable.

Ainsi, si l'objectif explicite de l'analyse est de répondre à un ensemble de questions précises, la formulation d'un modèle général, accompagné de spécifications plus ou moins réalistes, apparaît au mieux comme inutile, au pire comme risquant d'entraver la recherche de solutions satisfaisantes.

2.2.4 Remarque sur la notion de modèle spécifique

Pour définir un modèle spécifique d'échantillonnage, on peut concevoir deux manières. Une première conception consisterait à poser directement un modèle d'échantillonnage pour le protocole pertinent considéré, sans se soucier d'un éventuel modèle (général) pour le protocole à analyser; ce modèle pourrait alors être qualifié de *modèle spécifique primitif*. Une deuxième conception, qui est celle que nous adopterons dans les développements théoriques, consiste à poser un modèle d'échantillonnage pour le protocole dérivé pertinent considéré, en faisant *implicitement* référence à une classe de modèles généraux pour le protocole à analyser, classe dont le modèle spécifique est présenté comme un modèle dérivé; on peut alors parler, par opposition à la conception précédente, de *modèle spécifique dérivé*. De manière évidente, l'intérêt d'un modèle spécifique est d'autant plus grand que ce modèle renvoie à une classe plus large de modèles généraux.

Ainsi, en reprenant l'exemple précédent et en définissant les variables $d^s = x^{st1} - x^{st2}$, le modèle spécifique envisagé, considéré comme *primitif*, revient simplement à supposer que les variables d^s sont indépendantes et équidistribuées suivant une distribution normale de moyenne δ et de variance σ^2 , en ignorant purement et simplement les variables x^{st1} et x^{st2} .

D'un autre point de vue, ce modèle, comme nous l'avons remarqué précédemment, peut (par exemple) être considéré comme dérivé du modèle normal à deux dimensions (pour $S \times T$); mais il est bien entendu encore "compatible" avec quantifié d'autres modèles. Ainsi ce même modèle spécifique, considéré maintenant comme *dérivé*, pourrait être défini de la manière suivante:

$$(i) \begin{pmatrix} x^{st1} \\ x^{st2} \end{pmatrix} | \pi \sim D_2 \left(\begin{pmatrix} \mu^{t1} \\ \mu^{t2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{12} & \sigma^{22} \end{pmatrix} \right) \quad s \in S$$

$$(ii) \perp \left(\begin{pmatrix} x^{st1} \\ x^{st2} \end{pmatrix} \right) | s \in S | \pi$$

$$(iii) d^s | \pi \sim N(\delta, \sigma^2) \quad s \in S$$

où D_2 désigne une distribution, dont on suppose seulement qu'elle possède une moyenne et une matrice de variances et covariances et qui, outre les paramètres μ^{t1} , μ^{t2} , σ^{11} , σ^{12} , σ^{22} , dépend éventuellement d'autres paramètres; ainsi π représente l'ensemble des paramètres dont dépend cette distribution.

Cette deuxième conception renvoie donc à une classe de modèles généraux pour le protocole à analyser (classe à laquelle appartient le modèle normal à deux dimensions); mais seule est spécifiée explicitement la distribution d'échantillonnage des variables d^s et il s'agit donc bien d'un modèle spécifique pour le protocole des différences. Un avantage important de cette conception est que les paramètres δ et σ apparaissent eux-mêmes comme des paramètres dérivés (et n'ont pas le statut de paramètres primitifs): $\delta = \mu^{t1} - \mu^{t2}$ et $\sigma^2 = \sigma^{11} + \sigma^{22} - 2\sigma^{12}$. On évite ainsi le caractère arbitraire que pourrait revêtir dans certains cas un modèle spécifique primitif.

* 2.3 COMMENT JUSTIFIER UNE INFERENCE SPECIFIQUE?

La principale justification d'une inférence spécifique réside dans des raisons de *pertinence*. D'abord nous effectuons une inférence sur le paramètre qui nous intéresse, δ dans l'exemple précédent, et sur le paramètre σ , qui apparaît certes comme un paramètre secondaire mais qui bien souvent sera étroitement lié au paramètre principal; ainsi, dans la comparaison des deux traitements, δ et σ sont les paramètres, moyenne et écart-type, d'une même distribution. Ensuite nous posons un modèle spécifique d'échantillonnage au niveau d'un protocole dérivé pertinent. Cette idée de poser un modèle spécifique n'est d'ailleurs pas "révolutionnaire" et, en ce qui concerne la comparaison de deux traitements ("groupes appariés"), on trouve effectivement cette idée sous-jacente dans la plupart des exposés classiques; cependant, même si elle est utilisée, cette idée reste implicite (voir par exemple Cramér, 1946, page 463).

Mais on peut également envisager de justifier une inférence spécifique par des raisons *formelles*. Ceci conduit à se demander sous quelles conditions

l'inférence spécifique relative à un paramètre coïncide avec l'inférence générale que l'on pourrait effectuer sur ce même paramètre, ou au moins en est voisine. En d'autres termes, il s'agit de se demander quelles conditions doivent être remplies pour qu'on ne perde "pour ainsi dire aucune information" en effectuant une inférence spécifique plutôt qu'une inférence générale.

Reprenons encore l'exemple de l'inférence sur la différence entre les deux traitements. Lindley (1965, page 85) a discuté en détail cet exemple, dans une optique assez proche de celle de l'inférence bayésienne spécifique, et il suffira de reprendre ici ses arguments.

Définissons également le protocole dérivé $W^S = (w^S)_{s \in S}$, où $w^S = x^{st1} + x^{st2}$, qui à tout sujet s associe la somme $x^{st1} + x^{st2}$. Pour n'importe quel modèle de la classe de modèles généraux que nous avons considérée, on aura les propriétés suivantes.

- (1) La distribution d'échantillonnage du couple (d, s) ne dépend que des paramètres δ et σ .
- (2) La distribution d'échantillonnage de (d^S, w^S) conditionnellement à d et à s ne dépend pas des paramètres δ et σ .

On montre alors qu'en raison des propriétés (1) et (2) l'inférence générale sur les paramètres δ et σ , effectuée sous un modèle quelconque de la classe considérée, coïncide avec l'inférence spécifique si la condition suivante est remplie.

- (3) La distribution initiale relative au couple (δ, σ) est indépendante de la distribution initiale relative aux autres paramètres du modèle général. (Compte tenu du fait que la donnée des protocoles d^S et w^S est équivalente à la donnée du protocole complet $x^{S \times T}$).

Dès lors que la condition (3) sera également satisfaite, l'inférence spécifique apparaîtra donc pleinement justifiée. Les conditions précédentes permettent ainsi de délimiter le champ d'application de l'inférence spécifique et, dans les situations courantes d'analyse de données expérimentales, il paraîtra le plus souvent raisonnable de les supposer satisfaites (pour une discussion plus approfondie, cf Rouanet et Lecoutre, 1983).

* 2.4 VERS DES SOLUTIONS EFFECTIVES SIMPLIES

En dépit de la diversité des situations que nous avons envisagées (large classe de plans d'analyse, différents types de comparaisons), l'approche que nous avons effectuée du problème permet maintenant d'envisager des solutions effectives, simples et en petit nombre. La formalisation algébrique permet de dégager les structures fondamentales et, en conséquence, de réduire d'une

manière considérable la diversité des cas; la notion d'inférence spécifique ajoutée à la formalisation abstraite le principe essentiel qui fait que les solutions vont pouvoir être calculées sur les solutions du problème de l'inférence sur une moyenne sous le modèle normal.

Or on sait que, dans le cas de l'inférence sur une moyenne, les solutions bayésiennes usuelles (cf Lindley, 1965), comme d'ailleurs le test de signification, peuvent être directement déduites des distributions d'échantillonnage de la moyenne et de la variance-corrigée: ces deux distributions sont indépendantes; la première est une distribution normale, qui dépend de la moyenne et de la variance théoriques; la seconde est une distribution du *khi-deux*, qui dépend seulement de la variance théorique. Ceci caractérise la structure statistique spécifique "normale - *khi-deux*".

Les solutions bayésiennes pour l'inférence sur une moyenne s'appliquent immédiatement au cas de l'inférence sur l'effet d'un contraste (δ), dès lors que l'on a pour cette inférence la structure statistique spécifique "normale - *khi-deux*"; la moyenne est remplacée par la statistique "effet observé" d et la variance-corrigée par une statistique s^2 , homogène à une variance-corrigée. Cette structure "normale - *khi-deux*" peut être écrite sous la forme générale suivante:

$$\begin{array}{l} d \perp\!\!\!\perp s \mid \delta, \sigma \\ d \mid \delta, \sigma \sim N(\delta, b\sigma^2) \\ s^2 \mid \delta, \sigma \sim \sigma^2 \frac{\chi^2_q}{q} \end{array} \quad \begin{array}{l} b > 0 \\ \sigma > 0 \end{array}$$

où b et q sont des constantes à préciser suivant le cas particulier analysé.

L'extension au cas de l'inférence sur la grandeur de l'effet d'une comparaison à m degrés de liberté (λ) sera obtenue à partir de la structure statistique spécifique "multinormale - *khi-deux*", la statistique numérique d étant remplacée par la statistique multinumérique "représentant de l'effet observé" d . Cette structure "multinormale - *khi-deux*" peut être écrite sous la forme générale suivante:

$$\begin{array}{l} d \perp\!\!\!\perp s \mid \delta, \sigma \\ d \mid \delta, \sigma \sim N_m(\delta, b\sigma^2 \mathbf{I}_m) \\ s^2 \mid \delta, \sigma \sim \sigma^2 \frac{\chi^2_q}{q} \end{array} \quad \begin{array}{l} b > 0 \\ \sigma > 0 \end{array}$$

où b et q sont des constantes à préciser suivant le cas particulier analysé.

Parvenu à ce point de l'exposé, les solutions effectives pour l'Analyse

Bayésienne des Comparaisons dans la classe de plans $\underline{A} \langle G \rangle * T$ seront obtenues:

- d'une part en étudiant la structure statistique "multinormale - khi-deux" (qui inclut techniquement le cas particulier "normale - khi-deux" pour $m=1$); cette étude fera l'objet de la suite de ce chapitre et fournira la forme générale des solutions;

- d'autre part en étudiant, pour chacun des types de comparaisons envisagés, les modèles qui conduisent précisément à la structure "multinormale - khi-deux"; cette étude fera l'objet du prochain chapitre et précisera les solutions effectives pour chaque cas particulier.

* * *

3 UNE STRUCTURE STATISTIQUE REMARQUABLE:

LA STRUCTURE "MULTINORMALE - KHI-DEUX"

* 3.1 DEFINITION DU PROBLEME

La structure statistique "multinormale - khi-deux" présente ici un caractère tout à fait remarquable puisque son étude va fournir toutes les solutions inférentielles pour l'Analyse Bayésienne des Comparaisons dans la classe de plans $\underline{A} \langle G \rangle * T$.

On appellera structure statistique "multinormale - khi-deux", ou encore "m-normale - khi-deux", la donnée de deux statistiques, \underline{d} et s , qui, sous un certain modèle d'échantillonnage, ont des distributions d'échantillonnage caractérisées par:

$$\begin{aligned} & \underline{d} \perp\!\!\!\perp s \mid \underline{\delta}, \sigma \\ & \underline{d} \mid \underline{\delta}, \sigma \sim N_m(\underline{\delta}, b\sigma^2 \mathbf{I}_m) \quad b > 0 \quad \sigma > 0 \\ & s^2 \mid \underline{\delta}, \sigma \sim \sigma^2 \frac{\chi^2_q}{q} \quad \text{soit encore} \quad \frac{s}{\sigma} \mid \underline{\delta}, \sigma \sim \phi_q^{-1} \end{aligned}$$

La structure statistique "m-normale - khi-deux" fait donc intervenir le paramètre multinumérique $\underline{\delta}$ et le paramètre numérique σ . Pour l'inférence, on fera jouer au paramètre $\lambda = (\frac{\underline{\delta}' \underline{\delta}}{m})^{\frac{1}{2}}$ le rôle de paramètre numérique principal si $m \geq 2$ (si $m=1$ le paramètre numérique principal est bien entendu δ), σ jouant le rôle de paramètre numérique secondaire ou encore, préférons nous, adjoindre (car il n'est évidemment pas dépourvu d'intérêt). En particulier l'hypothèse nulle $\underline{\delta} = \underline{0}$ est équivalente à $\lambda = 0$.

On considérera en conséquence la statistique numérique $l = (\frac{\underline{d}' \underline{d}}{m})^{\frac{1}{2}}$; la distribution d'échantillonnage de l se déduit immédiatement de celle de \underline{d} ; elle est caractérisée par:

$$l^2 \mid \underline{\delta}, \sigma \sim b\sigma^2 \frac{\chi^2_m(\frac{m\lambda^2}{b\sigma^2})}{m}$$

Le test de signification est calqué sur les tests F classiques de l'analyse de la variance, ou encore sur les tests dits du t de Student dans le cas particulier $m=1$. Les procédures fiducio-bayésiennes et bayésiennes, en revanche, font appel aux distributions qui ont été introduites au chapitre précédent. On se reportera donc à la présentation de ces distributions qui fournit toutes les propriétés utiles pour les démonstrations.

* 3.2 TEST DE SIGNIFICATION DE L'HYPOTHESE NULLE $\lambda = 0$

On considérera la statistique de test $F = \frac{I^2}{bs^2}$, dont la distribution d'échantillonnage est, par définition de la distribution du F , celle d'un F à m et q degrés de liberté, non-centré en général (d'excentricité $\frac{m\lambda^2}{b\sigma^2}$), centré lorsque $\lambda = 0$; ce qu'on écrira :

$$\parallel \text{ sous } H_0: \lambda = 0, F \sim F_{m,q}$$

Il s'agit donc ici du F centré usuel à m et q degrés de liberté, qui est tabulé.

Dans le cas particulier $m = 1$ (structure "normale - khi-deux"), on envisagera encore la statistique de test $t = \frac{d}{\sqrt{bs}}$, dont la distribution d'échantillonnage est celle d'un t de Student à q degrés de liberté, non-centré en général (d'excentricité $\frac{\delta}{\sqrt{b\sigma}}$), centré lorsque $\delta = 0$; ce qu'on écrira :

$$\parallel \text{ sous } H_0: \delta = 0, t \sim t_q \quad (m = 1)$$

Il s'agit donc ici du t centré usuel à q degrés de liberté, qui est tabulé.

Il sera utile de désigner les valeurs observées de ces statistiques de test; nous noterons ces valeurs respectivement :

$$\begin{aligned} \parallel F_{\text{obs}} &= \frac{I^2}{bs^2} \\ \parallel t_{\text{obs}} &= \frac{d}{\sqrt{bs}} \quad (m = 1) \end{aligned}$$

On vérifie aisément que, pour $m = 1$, $F_{\text{obs}} = t_{\text{obs}}^2$.

* 3.3 PROCEDURES FIDUCIO-BAYESIENNES

Une inférence bayésienne pour la structure " m -normale - khi-deux" consistera à choisir une distribution initiale relative au couple (δ, σ) et à en déduire la distribution finale (étant donné d et s) par la formule de Bayes.

3.3.1 Résultats préliminaires

Nous commencerons par étudier :

- la structure " m -normale" (où δ seul est traité comme paramètre)

$$(i) d | \delta, (\sigma) \sim N_m(\delta, b\sigma^2 I_m)$$

- la structure "khi-deux" (où σ seul est traité comme paramètre)

$$(ii) s^2 | \sigma \sim \sigma^2 \frac{\chi^2_q}{q} \quad \text{soit encore} \quad \frac{\sigma}{s} | \sigma \sim \phi_q^{-1}$$

Inférence pour la structure " m -normale" - Pour une distribution initiale relative à δ de la forme $M(d_0, b_0 U_0)$, avec $b_0 > 0$ et $\det(U_0) > 0$, la distribution finale pour la structure " m -normale" (i) est encore une distribution normale; plus précisément on obtient :

$$d | d, (\sigma) \sim N_m \left(d_1, \frac{b_0 b}{b_0 + b} U_1 \right)$$

$$\text{où } d_1 = (b_0 \sigma^{-2} I_m + b U_0)^{-1} (b_0 \sigma^{-2} I_m d + b U_0^{-1} d_0) \quad \text{et} \quad U_1 = \left(\frac{b_0 \sigma^{-2} I_m + b U_0}{b_0 + b} \right)^{-1}$$

Preuve - Il suffit de chercher le terme en δ de la densité finale.

Remarquons d'abord que le terme en x d'une expression de la forme suivante $(x-y)' M^{-1} (x-y) = (y-x)' M^{-1} (y-x)$ s'écrit: $x' M^{-1} x - 2x' M^{-1} y$. En appliquant cette remarque on obtient :

$$\text{- le terme en } \delta \text{ de la densité d'échantillonnage de } d$$

$$\exp \left[-\frac{1}{2} (d - \delta)' (b_0^2 I_m)^{-1} (d - \delta) \right] \rightarrow \exp \left[-\frac{1}{2} (\delta' (b_0^2 I_m)^{-1} \delta - 2\delta' (b_0^2 I_m)^{-1} d) \right]$$

- le terme en δ de la densité initiale relative à δ

$$\exp \left[-\frac{1}{2} (\delta - d_0)' (b_0 U_0)^{-1} (\delta - d_0) \right] \rightarrow \exp \left[-\frac{1}{2} (\delta' (b_0 U_0)^{-1} \delta - 2\delta' (b_0 U_0)^{-1} d_0) \right]$$

- d'où le terme en δ de la densité finale, produit des deux précédents

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{b_0 \sigma^{-2} I_m + b U_0}{b_0 b} \delta - 2\delta' \frac{b_0 \sigma^{-2} I_m d + b U_0^{-1} d_0}{b_0 b} \right) \right]$$

qui est le terme en δ d'une expression de la forme $\exp \left[-\frac{1}{2} (\delta - d_1)' M_1^{-1} (\delta - d_1) \right]$, c'est-à-dire de la densité de la distribution $M(d_1, M_1)$, où

$$M_1 = \left(\frac{b_0 \sigma^{-2} I_m + b U_0}{b_0 b} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad d_1 = M_1 \frac{b_0 \sigma^{-2} I_m d + b U_0^{-1} d_0}{b_0 b}$$

dont on déduit facilement le résultat sous la forme énoncée.

Inférence pour la structure "khi-deux" - Pour une distribution initiale relative à σ de la forme $s_0 \phi_{q_0}^{-1}$, ce qu'on peut encore écrire $\frac{\sigma}{s_0} \sim \phi_{q_0}^{-1}$ (à rapprocher de la distribution d'échantillonnage de s), la distribution finale pour la structure "khi-deux" (ii) est encore une distribution de la même famille; plus précisément on obtient :

$$\sigma | s \sim s_1 \phi_{q_1}^{-1} \quad \text{soit} \quad \sigma^2 | s \sim s_1^2 \left(\frac{\chi^2_{q_1}}{q_1} \right)^{-1}$$

$$\text{où } s_1^2 = \frac{q_0 s_0^2 + q s^2}{q_0 + q} \quad \text{et} \quad q_1 = q_0 + q$$

Preuve - Il suffit de chercher le terme en σ de la densité finale, produit des termes en σ de la densité d'échantillonnage de s^2 et de la densité initiale relative à σ ; soit respectivement

$$(\sigma^2) \frac{-q}{2} \exp\left(-\frac{q s^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{et} \quad \sigma^{-(q_0+1)} \exp\left(-\frac{q_0 s_0^2}{2\sigma^2}\right)$$

On obtient pour le produit $\sigma^{-(q_0+q+1)} \exp\left(-\frac{q_0 s_0^2 + q s^2}{2\sigma^2}\right)$, soit le terme en σ de la densité de la distribution $s_1 \phi_{q_1}^{-1}$ où s_1 et q_1 ont été définis plus haut.

3.3.2 Distribution fiducio-bayésienne relative au couple (δ, σ)

Choix d'une distribution initiale - On conviendra d'une distribution initiale visant à exprimer un état initial d'ignorance. Pour cela on commença par supposer l'indépendance des distributions marginales relatives à δ et à σ ; puis on considérera la classe des distributions initiales définie par:

$$\begin{aligned} \delta &\sim N_m(\delta_0, b_0 U_0) & b_0 > 0 & \quad \det(U_0) > 0 \\ \sigma &\sim s_0 \phi_{q_0}^{-1} \\ &\text{avec } \delta \perp\!\!\!\perp \sigma \end{aligned}$$

Nous conviendrons d'exprimer un état initial d'ignorance en faisant tendre respectivement b_0 vers $+\infty$ et q_0 vers 0.

Caractérisation de la distribution fiducio-bayésienne - Quand $b_0 \rightarrow +\infty$ et $q_0 \rightarrow 0$, on obtient, en passant à la limite, la distribution finale relative au couple (δ, σ) , caractérisée par:

$$\begin{aligned} \delta^* | \sigma, \mathbf{d}, s &\sim N_m(\mathbf{d}, b\sigma^2 \mathbf{I}_m) \\ \sigma^* | \mathbf{d}, s &\sim s \phi_q^{-1} \end{aligned}$$

Cette distribution, que nous marquons d'un astérisque, est la *distribution fiducio-bayésienne* pour la structure statistique "m-normale - khi-deux".

Preuve - On utilise les résultats de la section précédente. La structure "multinomiale" traduit l'information (partielle) apportée par \mathbf{d} en fournissant à partir de la distribution initiale relative au couple (δ, σ) , d'une part la distribution $\delta | \sigma, \mathbf{d}$ et d'autre part la distribution $\sigma | \mathbf{d}$.

Compte tenu de l'indépendance des distributions initiales marginales, la distribution $\delta | \sigma, \mathbf{d}$ s'obtient comme en 3.3.1 et, en faisant tendre b_0 vers $+\infty$, on obtient en passant à la limite $\delta | \sigma, \mathbf{d} \sim N_m(\mathbf{d}, b\sigma^2 \mathbf{I}_m)$. Et cette distribution n'est autre que la distribution finale pour δ conditionnellement à σ , \mathbf{d} et s : en effet, en raison de l'indépendance des distributions d'échantillonnage,

on a $s | \delta, \sigma \sim s | \delta, \sigma, \mathbf{d}$, et encore $s | \delta, \sigma, \mathbf{d} \sim s | \sigma, \mathbf{d}$ (car $s^2 | \delta, \sigma \sim \sigma^2 \chi_q^2 / q$), d'où $s \perp\!\!\!\perp \delta | \sigma, \mathbf{d}$, soit $\delta | \sigma, \mathbf{d} \sim \delta | \sigma, \mathbf{d}, s \sim N_m(\mathbf{d}, b\sigma^2 \mathbf{I}_m)$.

Pour obtenir la distribution $\sigma | \mathbf{d}$ on remarque d'abord que la densité finale conjointe $f(\delta, \sigma | \mathbf{d})$ est égale au produit $f(\delta | \sigma, \mathbf{d}) \times f(\sigma | \mathbf{d})$; quand $b_0 \rightarrow +\infty$ le terme en σ qui provient de la densité d'échantillonnage de \mathbf{d} (distribution $N_m(\delta, b\sigma^2 \mathbf{I}_m)$) est exactement le terme en σ de la densité $f(\delta | \sigma, \mathbf{d})$ (distribution $N_m(\mathbf{d}, b\sigma^2 \mathbf{I}_m)$) et, par conséquent $f(\sigma | \mathbf{d})$ est égal à la densité initiale $f(\sigma)$ (dans ce cas \mathbf{d} "n'apporte pas d'information" sur σ).

La structure "khi-deux" fournit alors la distribution finale $\sigma | \mathbf{d}, s$, en utilisant d'une part le fait que $s^2 | \sigma, \mathbf{d} \sim s^2 | \sigma$ (indépendance des distributions d'échantillonnage) et d'autre part le fait que $\sigma | \mathbf{d} \sim \sigma$ établi ci-dessus. On a donc ici (pour $b_0 \rightarrow +\infty$) $\sigma | \mathbf{d}, s \sim \sigma | s$ qui s'obtient comme en 3.3.1; et, en faisant tendre q_0 vers 0, on obtient en passant à la limite $\sigma | \mathbf{d}, s \sim s \phi_q^{-1}$.

Autres manières d'obtenir la distribution fiducio-bayésienne - La distribution fiducio-bayésienne est souvent justifiée dans le cadre bayésien par le recours à la distribution initiale *non-informative* définie en prenant la densité conjointe $f(\delta, \sigma)$ proportionnelle à $\frac{1}{\sigma}$ (il s'agit d'une distribution improprie, c'est-à-dire de masse totale infinie); ceci revient à considérer une distribution initiale uniforme sur \mathbb{R}^2 pour le couple $(\delta, \log \sigma)$. Souvent encore on considère la limite obtenue en prenant une suite de distributions initiales *localement uniformes* (donc propres). Nous évoquerons encore ici les justifications *fiduciales* (Fisher) de la distribution fiducio-bayésienne.

3.3.3 Distributions fiducio-bayésiennes relatives à $\delta, \frac{\delta}{\sigma}, \lambda, \frac{\lambda}{\sigma}, \xi, \lambda$

On déduit maintenant les résultats suivants en utilisant les caractérisations et propriétés des distributions t, L', ψ et L .

Distribution fiducio-bayésienne relative à δ - La distribution fiducio-bayésienne (marginale) relative au paramètre δ est une distribution du t de Student généralisé m -dimensionnelle:

$$\delta^* | \mathbf{d}, s \sim t_{m; q}(\mathbf{d}, b s^2 \mathbf{I}_m)$$

Distribution fiducio-bayésienne relative à δ/σ - La distribution fiducio-bayésienne relative au rapport $\frac{\delta}{\sigma}$ est une distribution L' m -dimensionnelle:

$$\frac{\delta^*}{\sigma} | \mathbf{d}, s \sim L'_{m; q} \left(\frac{\mathbf{d}}{s}, b \mathbf{I}_m \right)$$

Distribution fiducio-bayésienne relative à λ - La distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre λ est une distribution du ψ :

$$\lambda^* | \sigma, \mathbf{d}, s \sim \left(\frac{b}{m} \right)^{\frac{1}{2}} s \psi_{m,q} \left(\frac{m \mathbf{1}^2}{b s^2} \right) \quad \text{où } \mathbf{1}^2 = \frac{\mathbf{d}' \mathbf{d}}{m}$$

La distribution conditionnelle à σ étant une distribution du χ :

$$\lambda^* | \sigma, \mathbf{d}, s \sim \left(\frac{b}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma \chi_m \left(\frac{m \mathbf{1}^2}{b \sigma^2} \right)$$

Distribution fiducio-bayésienne relative au rapport λ/σ - La distribution fiducio-bayésienne relative au rapport $\frac{\lambda}{\sigma}$ est une distribution L :

$$\lambda^* | \mathbf{d}, s \sim \left(\frac{b}{m} \right)^{\frac{1}{2}} L_{m,q} \left(\frac{m \mathbf{1}^2}{b s^2} \right)$$

Distribution fiducio-bayésienne relative à $\xi_{\mathbf{d}}$ - La distribution fiducio-bayésienne relative à l'indicateur de la grandeur de l'écart relatif de l'effet $\xi_{\mathbf{d}} = \frac{(\delta - \mathbf{d})' (\delta - \mathbf{d})}{m}$ est une distribution du ψ centré:

$$\xi_{\mathbf{d}}^* | \mathbf{d}, s \sim \left(\frac{b s^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_{m,q} (0)$$

soit encore

$$\xi_{\mathbf{d}}^{2*} | \mathbf{d}, s \sim b s^2 F_{m,q}$$

(ceci se déduit de $\phi^* | \mathbf{d}, s \sim \mathbf{t}_{m;q}(\mathbf{0}, b s^2 \mathbf{I}_m)$)

3.3.4 Lien avec le test de signification

En utilisant la valeur $F_{obs} = \frac{\mathbf{1}^2}{b s^2}$ prise par la statistique de test F , les distributions précédentes peuvent être écrites sous la forme suivante, pourvu que $F_{obs} \neq 0$ (soit $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$):

$$\phi^* | \mathbf{d}, s \sim \mathbf{t}_{m;q} \left(\frac{\mathbf{d}}{F_{obs}}, \frac{\mathbf{1}^2}{m} - \mathbf{I}_m \right)$$

avec la distribution conditionnelle à σ

$$\phi^* | \sigma, \mathbf{d}, s \sim N_m \left(\frac{\mathbf{d}}{F_{obs}}, \frac{\mathbf{1}^2}{s^2} - \mathbf{I}_m \right)$$

$$\phi^* | \mathbf{d}, s \sim \mathbf{I}_{m;q} \left(\frac{\mathbf{d}}{s}, \frac{s^2}{F_{obs}} - \mathbf{I}_m \right)$$

$$\lambda^* | \mathbf{d}, s \sim \left(\frac{\mathbf{1}^2}{m F_{obs}} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_{m,q} (m F_{obs})$$

avec la distribution conditionnelle à σ

$$\lambda^* | \sigma, \mathbf{d}, s \sim \left(\frac{\mathbf{1}^2}{m F_{obs}} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma \chi_m \left(\frac{s^2}{\sigma^2} m F_{obs} \right)$$

$$\lambda^* | \mathbf{d}, s \sim \left(\frac{\mathbf{1}^2}{m F_{obs}} \right)^{\frac{1}{2}} L_{m,q} (m F_{obs})$$

$$\xi_{\mathbf{d}}^* | \mathbf{d}, s \sim \left(\frac{\mathbf{1}^2}{m F_{obs}} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_{m,q} (0)$$

soit encore

$$\xi_{\mathbf{d}}^{2*} | \mathbf{d}, s \sim \frac{\mathbf{1}^2}{F_{obs}} F_{m,q}$$

Remarques - On a les propriétés suivantes.

- Dans le cas particulier $m=1$, on a $d^2 = \mathbf{1}^2$ et on peut encore utiliser la valeur $t_{obs} = d/\sqrt{b}$ prise par la statistique de test t et remplacer F_{obs} par t_{obs}^2 .
- De la distribution relative à $\xi_{\mathbf{d}}$ on déduit:

$$P(\xi_{\mathbf{d}}^* > 1) = P(\xi_{\mathbf{d}}^{2*} > 1^2) = P(F_{m,q} > F_{obs}) = p$$

Cette probabilité, notée p , correspond à ce qu'il est convenu d'appeler le *seuil de signification observé* du test F .

• Dans le cas particulier $m=1$, on déduit de la distribution relative à δ :

$$\text{- si } d > 0, P(\phi^* < 0) = P(t > t_{obs}) = \frac{p}{2}$$

$$\text{- si } d < 0, P(\phi^* > 0) = P(t < -t_{obs}) = \frac{p}{2}$$

La probabilité $p/2$ correspond à ce qu'il est convenu d'appeler le *seuil de signification unilatéral observé* du test t .

* 3.4 DISTRIBUTIONS PREDICTIVES (FIDUCIO-BAYESIENNES)

Etant donné la distribution fiducio-bayésienne relative aux paramètres

δ et σ , on peut utiliser cette distribution pour faire des *prédictions* concernant de nouvelles observations. Pour cela on dérive la *distribution prédictive* relative aux statistiques \mathbf{d} et s pour une *nouvelle expérience* qui serait caractérisée par b' (au lieu de b) et q' (au lieu de q), étant donné les valeurs \mathbf{d} et s observées dans la première expérience; la distribution fiducio-bayésienne (finale pour la première expérience) joue le rôle de distribution initiale pour la nouvelle expérience. Bien entendu on ne confondra pas la *distribution prédictive fiducio-bayésienne* ainsi obtenue avec la distribution *prédictive initiale* (relative à la première expérience) définie en 1.1.5.

3.4.1 Distributions prédictives marginales

Distribution prédictive pour \mathbf{d} - On a pour \mathbf{d} la distribution prédictive fiducio-bayésienne (marquée d'un astérisque):

$$\mathbf{d}^* | \mathbf{d}, s \sim t_{m; q}(\mathbf{d}, (b+b')s^2 \mathbf{I}_m)$$

Ce résultat peut être obtenu ainsi: de $\mathbf{d} | \sigma, \sigma \sim \mathcal{N}_m(\sigma, b'\sigma^2 \mathbf{I}_m)$ - distribution d'échantillonnage pour la nouvelle expérience - et de $\mathbf{d}^* | \sigma, \mathbf{d}, s \sim \mathcal{N}_m(\mathbf{d}, b\sigma^2 \mathbf{I}_m)$ - distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre σ conditionnellement à σ - on déduit, par application d'une propriété classique de la distribution normale $\mathbf{d} | \sigma, \mathbf{d}, s \sim \mathcal{N}_m(\mathbf{d}, (b+b')\sigma^2 \mathbf{I}_m)$; et puisque $\sigma^* | \mathbf{d}, s \sim s \phi_q^{-1}$ - distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre σ - on en déduit le résultat cherché en utilisant les propriétés de la distribution du t .

Distribution prédictive pour s - On a pour s la distribution prédictive fiducio-bayésienne (marquée d'un astérisque):

$$s^* | \mathbf{d}, s \sim s F_{q, q}^{\frac{1}{2}}$$

Ce résultat peut être obtenu ainsi: de $s^2 | \sigma, \mathbf{d} \sim \sigma^2 \frac{\chi_{2q}^2}{q}$ - distribution d'échantillonnage pour la nouvelle expérience - et de $\sigma^* | \mathbf{d}, s \sim s \phi_q^{-1}$ - distribution fiducio-bayésienne relative à σ - on déduit en utilisant la caractérisation de la distribution du F : $s^2 | \mathbf{d}, s \sim s^2 F_{q, q}$, d'où le résultat cherché.

Distribution prédictive pour \mathbf{I} - De la distribution prédictive pour \mathbf{d} , on déduit la distribution prédictive fiducio-bayésienne pour $\mathbf{I} = (\frac{\mathbf{d}' \mathbf{d}}{m})^{\frac{1}{2}}$:

$$I^* | \mathbf{d}, s \sim \left(\frac{b+b'}{m} \right)^{\frac{1}{2}} s \psi_{m, q} \left(\frac{ml^2}{(b+b')s^2} \right)$$

Il suffit d'appliquer les propriétés de la distribution du ψ .

3.4.2 Distribution prédictive conditionnelle pour \mathbf{d} étant donné s'

On peut encore obtenir la distribution prédictive conditionnelle pour \mathbf{d} étant donné s' , où s' est la valeur que prendrait la statistique s dans la nouvelle expérience:

$$\mathbf{d}^* | s', \mathbf{d}, s \sim t_{m; q+q'}(\mathbf{d}, (b+b') \frac{qs^2+q's'^2}{q+q'} \mathbf{I}_m)$$

d'où encore

$$I^* | s', \mathbf{d}, s \sim \left(\frac{b+b'}{m} \frac{qs^2+q's'^2}{q+q'} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_{m, q+q'} \left(\frac{ml^2}{(b+b') \frac{qs^2+q's'^2}{q+q'}} \right)$$

Preuve - De la distribution conditionnelle à σ (cf 3.4.1) donnée par

$\mathbf{d}^* | \sigma, \mathbf{d}, s \sim \mathcal{N}_m(\mathbf{d}, (b+b')\sigma^2 \mathbf{I}_m)$, on déduit $\mathbf{d}^* | \sigma, s', \mathbf{d}, s \sim \mathcal{N}_m(\mathbf{d}, (b+b')\sigma^2 \mathbf{I}_m)$. Par ailleurs, de $s^2 | \sigma \sim \sigma^2 \chi_{2q}^2 / q$ - distribution d'échantillonnage pour la nouvelle expérience - , on déduit $s'^2 | \sigma, \mathbf{d}, s \sim \sigma^2 \chi_{2q'}^2 / q'$; et puisque $\sigma^* | \mathbf{d}, s \sim s \phi_q^{-1}$ - distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre σ - on en déduit en procédant de la même manière que pour l'étude de la structure "khi-deux" (cf 3.3.1): $\sigma^* | s', \mathbf{d}, s \sim \left(\frac{qs^2+q's'^2}{q+q'} \right)^{\frac{1}{2}} \phi_{q+q'}^{-1}$. On obtient finalement le résultat cherché en utilisant les propriétés de la distribution du t .

3.4.3 Distributions prédictives pour $\frac{\mathbf{d}}{s}, \frac{\mathbf{I}}{s}, t, F$

A partir des résultats précédents, on déduit les résultats suivants en utilisant les propriétés des distributions K' et K .

Distribution prédictive pour le rapport $\frac{\mathbf{d}}{s}$ - On a pour le rapport $\frac{\mathbf{d}}{s}$ la distribution prédictive fiducio-bayésienne:

$$\left| \frac{\mathbf{d}^*}{s} | \mathbf{d}, s \sim K'_{m; q, q'} \left(\frac{\mathbf{d}}{s}, (b+b') \mathbf{I}_m \right) \right.$$

Distribution prédictive pour le rapport $\frac{\mathbf{I}}{s}$ - On a pour le rapport $\frac{\mathbf{I}}{s}$ la distribution prédictive fiducio-bayésienne:

$$\left| \frac{I^*}{s} | \mathbf{d}, s \sim \left(\frac{b+b'}{m} \right)^{\frac{1}{2}} K_{m, q, q'} \left(\frac{ml^2}{(b+b')s^2} \right) \right.$$

Distribution prédictive pour t - Dans le cas particulier $m=1$, on a pour la statistique de test $t = d/\sqrt{b's}$ la distribution prédictive fiducio-bayésienne:

$$\left| t^* | \mathbf{d}, s \sim K'_{q, q'} \left(\left(\frac{b}{b'} \right)^{\frac{1}{2}} t, \text{obs} \frac{b+b'}{b'} \right) \quad (m=1) \right.$$

Distribution prédictive pour F - On a pour la statistique de test $F = l^2/b's^2$ la distribution prédictive fiducio-bayésienne:

$$\left| F^* | \mathbf{d}, s \sim \frac{b+b'}{mb'} K^2_{m, q, q'} \left(\frac{mb}{b+b'} F, \text{obs} \right) \right.$$

3.4.4 Cas particulier d'une réplique de l'expérience

Dans le cas particulier d'une réplique de l'expérience, soit $b' = b$ et $q' = q$, les distributions prédictives, comme les distributions relatives aux paramètres, s'expriment en fonction de F_{obs} (ou encore de t_{obs} pour $m=1$). On a notamment ($F_{\text{obs}} \neq 0$):

$$\left| \mathbf{d}^* | \mathbf{d}, s \sim t_{m; q} \left(\mathbf{d}, 2 \frac{l^2}{F_{\text{obs}}} \mathbf{I}_m \right) \right.$$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{d^*}{s} \mid d, s \sim K'_{m; q, q} \left(\frac{d}{s}, 2 \frac{s^2}{F} \mathbf{I}_m \right) \right. \\ & \left. \left\| 1^* \mid d, s \sim \left(\frac{21^2}{mF} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_{m, q} \left(\frac{m}{2} \mathbf{I}_m \right) \right. \right. \\ & \left. \left\| \frac{1^*}{s} \mid d, s \sim \left[\frac{2 \frac{1^2}{s^2}}{mF} \right]^{\frac{1}{2}} K_{m, q, q} \left(\frac{m}{2} \mathbf{I}_m \right) \right. \right. \\ & \left. \left\| t^* \mid d, s \sim K'_{q, q} (t_{obs}, 2) \right. \right. \quad (m=1) \\ & \left. \left\| F^* \mid d, s \sim \frac{2}{m} K^2_{m, q, q} \left(\frac{m}{2} \mathbf{I}_m \right) \right. \right. \end{aligned}$$

3.4.5 Remarque: quand $b' \rightarrow 0$ et $q' \rightarrow +\infty$

Quand $b' \rightarrow 0$ et $q' \rightarrow +\infty$ (ce qui, en pratique, correspondrait à une nouvelle expérience avec un très grand nombre d'observations), les distributions prédictives coïncident à la limite avec les distributions fiducio-bayésiennes relatives aux paramètres, puisque:

$$\begin{aligned} d^* \mid s', d, s & \sim N_m(d, bs'^2 \mathbf{I}_m) & \text{et} & \quad s^* \mid d, s \sim q s \phi_q^{-1} \\ d^* \mid \sigma, d, s & \sim N_m(d, b\sigma^2 \mathbf{I}_m) & \text{et} & \quad \sigma^* \mid d, s \sim s \phi_q^{-1} \end{aligned}$$

ce qui est analogue à

Ce résultat est important sur le plan conceptuel, puisqu'il permet d'assimiler les paramètres avec les valeurs des statistiques correspondantes obtenues pour un très grand nombre d'observations.

* 3.5 PROCEDURES BAYESIENNES: CAS D'UNE DISTRIBUTION INITIALE DE LA MEME FAMILLE QUE LA DISTRIBUTION FIDUCIO-BAYESIENNE

3.5.1 Choix d'une distribution initiale

Il est bien entendu toujours possible de dériver la distribution finale correspondant à une distribution initiale quelconque; la densité finale conjointe relative au couple (δ, σ) est, à une constante de proportionnalité près, égale au produit de la densité initiale par la densité d'échantillonnage conjointe des statistiques d et s^2 , soit si $f(\delta, \sigma)$ est la densité initiale:

$$f(\delta, \sigma \mid d, s) \propto f(\delta, \sigma) \times f(d, s^2 \mid \delta, \sigma)$$

d'où, en explicitant $f(d, s^2 \mid \delta, \sigma) = f(d \mid \delta, \sigma) \times f(s^2 \mid \delta, \sigma)$ (en raison de

l'indépendance des distributions d'échantillonnage de d et s^2):

$$f(\delta, \sigma \mid d, s) \propto \sigma^{-(m+q)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{(d-\delta)'(d-\delta)}{b} + qs^2 \right) \right] \times f(\delta, \sigma)$$

Nous développerons maintenant le cas où l'on choisit une distribution initiale de la même famille que la distribution fiducio-bayésienne, soit une distribution caractérisée par:

$$\begin{aligned} \sigma \mid \sigma & \sim N_m(d_0, b_0 \sigma^2 \mathbf{I}_m) & b_0 & > 0 \\ \sigma & \sim s_0 \phi_q^{-1} & s_0 & > 0 \end{aligned}$$

3.5.2 Distribution finale

Distribution finale relative au couple (δ, σ) - Pour la distribution initiale précédente, la distribution finale relative au couple (δ, σ) est encore une distribution de la même famille, caractérisée par:

$$\begin{aligned} \sigma \mid \sigma, d, s & \sim N_m(d_1, b_1 \sigma^2 \mathbf{I}_m) \\ \sigma \mid d, s & \sim s_1 \phi_q^{-1} \\ \text{où } d_1 & = \frac{b_0 d + b d_0}{b_0 + b} \\ b_1 & = \frac{b_0 b}{b_0 + b} \\ s_1 & = \left[\frac{q_0 s_0^2 + q s^2 + \frac{(d_0 - d)'(d_0 - d)}{b_0 + b}}{q_0 + q + m} \right]^{\frac{1}{2}} \\ q_1 & = q_0 + q + m \end{aligned}$$

Preuve - Il suffit de chercher les termes en δ et σ de la densité finale à partir de la formule donnée en 3.5.1, en explicitant:

$$\begin{aligned} f(\delta, \sigma) & = f(\delta \mid \sigma) \times f(\sigma) \\ & \propto \sigma^{-m} \exp \left(-\frac{1}{2b_0 \sigma^2} (\delta - d_0)' (\delta - d_0) \right) \times \sigma^{-(q_0+1)} \exp \left(-\frac{q_0 s_0^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

On en déduit pour la distribution finale:

$$\begin{aligned} f(\delta, \sigma \mid d, s) & = f(\delta \mid \sigma, d, s) \times f(\sigma \mid d, s) \\ & \propto \sigma^{-m} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{b_0 (\delta' \delta - 2\delta' d + d' d) + b (\delta' d_0 - 2\delta' d_0 + d_0' d_0)}{b_0 + b} \right] \\ & \quad \times \sigma^{-(q_0 + q + m + 1)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (q_0 s_0^2 + q s^2 + \frac{(d_0 - d)'(d_0 - d)}{b_0 + b}) \right] \end{aligned}$$

soit, après mise en facteur

$$\sigma^{-m} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{b_0 + b}{b_0 b} (\delta - b_0 d + b d_0)^2 (\delta - \frac{b_0 d + b d_0}{b_0 + b}) \right] \\ \times \sigma^{-(q_0 + q + m + 1)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (q_0 s_1^2 + q s^2 + \frac{(d_0 - d)^2 (d_0 - d)}{b_0 + b}) \right]$$

Le résultat cherché est établi en identifiant: d'une part, dans la première ligne le terme en δ et σ de la densité de la distribution $M_m(d_1, b_1 \sigma^2 \mathbf{I}_m)$; d'autre part, dans la seconde ligne, le terme en σ de la densité de la distribution $s_1 \phi_{q_1}^{-1}$.

Conséquences pour les procédures bayésiennes - La distribution finale relative au couple (δ, σ) étant de la même famille que la distribution fiducio-bayésienne, les distributions finales relatives à δ , $\frac{\delta}{\sigma}$, λ , $\frac{\lambda}{\sigma}$ ainsi que les distributions prédictives s'obtiennent exactement de la même manière que les calculées. Les valeurs d_1 , b_1 , s_1 et q_1 , les procédures bayésiennes se déduisent des procédures fiducio-bayésiennes en remplaçant dans toutes les formules d , b , s et q par d_1 , b_1 , s_1 et q_1 .

3.5.3 Cas particuliers: $b_0 \rightarrow +\infty$; $q_0 \rightarrow 0$

Il est intéressant de considérer chacun des deux cas particuliers $b_0 \rightarrow +\infty$ et $q_0 \rightarrow 0$, qui reviennent à exprimer un état d'ignorance initial vis-à-vis de l'un des paramètres (respectivement δ et σ).

$b_0 \rightarrow +\infty$ - On obtient dans ce cas, en passant à la limite:

$$d_1 = d \text{ et } b_1 = b \text{ qui sont inchangés par rapport à la distribution fiducio-bayésienne}$$

$$s_1 = \left(\frac{q_0 s_1^2 + q s^2}{q_0 + q + m} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } q_1 = q_0 + q + m$$

$q_0 \rightarrow 0$ - On obtient dans ce cas, en passant à la limite:

d_1 et b_1 inchangés par rapport au cas général

$$s_1 = \left[\frac{q s^2 + \frac{(d_0 - d)^2 (d_0 - d)}{b_0 + b}}{q + m} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } q_1 = q + m$$

Remarque: quand $b_0 \rightarrow +\infty$ et $q_0 \rightarrow 0$ - Enfin on remarquera qu'en faisant tendre simultanément b_0 vers $+\infty$ et q_0 vers 0, on obtient, en passant à la limite, la distribution finale caractérisée par:

$$\sigma | \sigma, d, s \sim M_m(\delta, b \sigma^2 \mathbf{I}_m)$$

$$\sigma | d, s \sim \left(\frac{q}{q+m} \right)^{\frac{1}{2}} s \phi_{q+m}^{-1}$$

La distribution relative à σ diffère de la distribution fiducio-bayésienne par l'introduction de m degrés de liberté "supplémentaires"; ces m degrés de liberté proviennent du fait que l'on a ici supposé une non-indépendance des distributions initiales marginales relatives à δ et σ , et ils traduisent d'une certaine manière cette information.

* * *

4 RECAPITULATIF DES RESULTATS ESSENTIELS POUR LA PRATIQUE

* 4.1 PROCEDURES FIDUCIO-BAYESIENNES: SI VOUS SAVEZ FAIRE UN TEST DE SIGNIFICATION...

A partir du moment où on a calculé, avec bien entendu une précision suffisante, la valeur F_{obs} prise par le rapport F usuel de l'analyse de la variance, ou encore dans le cas $m = 1$ la valeur t_{obs} ($F_{obs} = t_{obs}^2$), il est immédiat d'en déduire les distributions fiducio-bayésiennes.

Il suffit alors de calculer e ($e > 0$) tel que :

- dans le cas de l'inférence sur l'effet associé à un contraste ($m = 1$)

$$\left| \left| e^2 = \frac{d^2}{F_{obs}} \right. \right. \quad (d \neq 0)$$

- dans le cas de l'inférence sur la grandeur de l'effet associé à une comparaison à m degrés de liberté (m quelconque)

$$\left| \left| e^2 = \frac{l^2}{m F_{obs}} \right. \right. \quad (l \neq 0)$$

Les valeurs e , d ou l , s , m et q suffisent alors pour obtenir les distributions fiducio-bayésiennes, ainsi qu'on peut le voir dans le tableau 1, où sont résumés un certain nombre de résultats essentiels, concernant les distributions fiducio-bayésiennes finales relatives aux paramètres et prédictives relatives aux statistiques dans le cas particulier où la prédiction porte sur une réplique de l'expérience.

En résumé, "si vous savez faire un test de signification (c'est-à-dire calculer F_{obs} ou t_{obs}), alors vous savez obtenir les distributions fiducio-bayésiennes".

En pratique les difficultés supplémentaires liées à l'utilisation des procédures fiducio-bayésiennes ne résident donc pas dans l'obtention des distributions, mais seront seulement des difficultés techniques posées par l'emploi de ces distributions: calcul de densités (pour figurer les distributions) et calcul de probabilités ou de limites à l'aide de tables ou de programmes informatiques; il suffira donc de se familiariser avec ces techniques.

Un amendement doit cependant être apporté à l'affirmation précédente: dans le cas (rare!) où l'effet observé serait nul ($d = 0$ ou $l = 0$ soit encore $F_{obs} = 0$), il serait bien entendu impossible de calculer e de la manière précédente; dans ce cas (et celui-là seul), il faudrait donc avoir recours à un calcul supplémentaire pour calculer la valeur de e , les distributions du tableau 1 étant bien entendu toujours valables (les formules nécessaires dans chaque cas particulier seront données dans le chapitre suivant).

Tableau 1 - Récapitulatif des résultats essentiels concernant les distributions fiducio-bayésiennes

CAS D'UN CONTRASTE		CAS D'UNE COMPARAISON	
paramètre	distribution	paramètre	distribution
δ	$t_q(d, e^2)$	λ	$e\psi_{m,q}\left(\frac{l^2}{e^2}\right)$
σ	$s\phi_q^{-1}$	σ	$s\phi_q^{-1}$
$\frac{\delta}{\sigma}$	$L'_q\left(\frac{d}{s}, \frac{e^2}{s^2}\right)$	$\frac{\lambda}{\sigma}$	$\frac{e}{s}L_{m,q}\left(\frac{l^2}{e^2}\right)$
ξ_d	$e\psi_{1,q}(0)$	ξ_d	$e\psi_{m,q}(0)$
statistique	distribution	statistique	distribution
d	$t_q(d, e^2)$	l	$\sqrt{2}e\psi_{m,q}\left(\frac{l^2}{2e^2}\right)$
s	$sF_{q,q}^{\frac{1}{2}}$	s	$sF_{q,q}^{\frac{1}{2}}$
$\frac{d}{s}$	$K'_{q,q}\left(\frac{d}{s}, 2\frac{e^2}{s^2}\right)$	$\frac{l}{s}$	$\sqrt{2}\frac{e}{s}K_{m,q,q}\left(\frac{l^2}{2e^2}\right)$
t	$K'_{q,q}(t_{obs}, 2)$	F	$\frac{2}{m}K_{m,q,q}\left(\frac{m}{2}F_{obs}\right)$

Distributions relatives aux paramètres

Distributions prédictives
(cas d'une réplique)

* 4.2 PROCEDURES BAYESIENNES: SI VOUS SAVEZ UTILISER LES PROCEDURES FIDUCIO-BAYESIENNES...

Dans le cas (auquel nous limitons ici) où la distribution initiale est une distribution de la même famille que la distribution fiducio-bayésienne, la distribution finale (et par suite la distribution prédictive) est encore de la même famille; en outre, à partir du moment où on a calculé e (donc si on a obtenu la distribution fiducio-bayésienne), on dispose de tous les éléments nécessaires pour obtenir cette distribution finale.

On a d'une part les valeurs observées e , d (si $m=1$) ou \mathbf{d} , s et les nombres de degrés de liberté m et q ; et on a d'autre part les valeurs caractéristiques correspondantes de la distribution initiale, qu'on notera e_0 , d_0 ou \mathbf{d}_0 , s_0 , m (le même bien entendu) et q_0 . La distribution finale est alors caractérisée par les valeurs e_1 , d_1 ou \mathbf{d}_1 , s_1 , m et q_1 , que l'on peut obtenir de la manière suivante.

- On calcule d'abord comme intermédiaires (avec la précision nécessaire)

$$b_0 = m \left(\frac{e_0}{s_0} \right)^2 \quad \text{et} \quad b = m \left(\frac{e}{s} \right)^2$$

- On a ensuite les formules

• pour un contraste ($m=1$)

$$d_1 = \frac{b_0 d + b d_0}{b_0 + b}$$

$$s_1^2 = \frac{q_0 s_0^2 + q s^2 + \frac{(d_0 - d)^2}{b_0 + b}}{q_0 + q + 1}$$

$$q_1 = q_0 + q + 1$$

$$e_1^2 = \frac{b_0 b}{b_0 + b} s_1^2 \quad (\text{soit } b_1 = \frac{b_0 b}{b_0 + b})$$

• pour une comparaison à m degrés de liberté

$$l_1 = \left(\frac{\mathbf{d}_1' \mathbf{d}_1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } \mathbf{d}_1 = \frac{b_0 \mathbf{d} + b \mathbf{d}_0}{b_0 + b}$$

$$s_1^2 = \frac{q_0 s_0^2 + \frac{(\mathbf{d}_0 - \mathbf{d})' (\mathbf{d}_0 - \mathbf{d})}{b_0 + b}}{q_0 + q + m}$$

$$q_1 = q_0 + q + m$$

$$e_1^2 = \frac{1}{m} \frac{b_0 b}{b_0 + b} s_1^2 \quad (\text{soit } b_1 = \frac{b_0 b}{b_0 + b})$$

CHAPITRE IV

*

MODELES

1 INTRODUCTION

* 1.1.1 UN MODELE DE BASE: LE MODELE "MULTINORMAL DES GROUPES SEPARÉS"

Une inférence spécifique de l'Analyse Bayésienne des Comparaisons sera calquée sur l'inférence sur une moyenne, et mettra en jeu, dans les situations considérées ici, la structure statistique "m-normale - khi-deux". Il convient donc de rechercher les modèles d'échantillonnage conduisant à cette structure statistique. Ces modèles sont en fait classiques; mais ici nous les envisagerons, non pas comme on le fait généralement dans le cadre de tel ou tel problème particulier, mais de manière plus abstraite, c'est-à-dire comme pouvant s'appliquer à un type de protocoles dérivés (donc munis d'une certaine pondération). Il faut bien avoir à l'esprit le fait que, conformément au principe d'inférence spécifique, un modèle relativement élémentaire, posé au niveau d'un protocole dérivé pertinent, sera souvent suffisant, même dans le cas d'un plan d'analyse très complexe; car le protocole dérivé correspondra généralement à une structure de plan (dérivé) beaucoup plus simple.

Le modèle le plus élémentaire est bien entendu le *modèle normal*, archi-classique pour l'inférence sur une moyenne ("les observations sont les réalisations de variables normales, indépendantes et équidistribuées"), à deux paramètres numériques, δ et σ^2 . Ce modèle conduit à la structure statistique spécifique "normale - khi-deux" pour la moyenne δ et la variance-corrigée s^2 de la famille de variables considérée: clairement ce modèle s'appliquera à un protocole dérivé (numérique) dont le plan est du type $\underline{A} \rightarrow \mathbb{R}$.

La généralisation de ce modèle conduit au *modèle multinormal* ("les observations sont les réalisations de variables multinormales, indépendantes et équidistribuées"). Le cas particulier où la matrice des variances et covariances est proportionnelle à la matrice unité, et où le modèle a donc seulement un paramètre multinumérique δ et un paramètre numérique σ^2 , conduit à la structure statistique spécifique "m-normale - khi-deux". Ce modèle s'appliquera à un protocole dérivé multinumérique dont le plan est du type $\underline{A} \rightarrow \mathbb{R}^p$.

L'extension au cas des *groupes séparés* - protocoles dérivés de types $\underline{A} \langle G \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ et $\underline{A} \langle G \rangle \rightarrow \mathbb{R}^p$ - sera, de manière assez évidente, obtenue en supposant l'indépendance des observations entre les groupes" et en posant, à l'intérieur de chaque groupe, le modèle normal ou multinormal suivant la situation. On obtiendra ainsi les modèles respectifs, dits "normal des groupes séparés" et "multinormal des groupes séparés". Ce dernier est en fait le modèle de base, dont le premier est un cas particulier, et qu'il nous suffira donc

d'étudier. Il s'agira de rechercher et d'énoncer les conditions sous lesquelles ce modèle conduit à la structure statistique "m-normale - khi-deux" (avec le cas particulier "normale - khi-deux" pour m = 1).

* 1.2 PLAN DU CHAPITRE

2 LE MODELE MULTINORMAL DES GROUPES SEPARES.....
 2.1 Définition et théorème fondamental.....
 2.2 Corollaires.....
 2.3 Un cas particulier: le modèle "normal des groupes séparés"....
 3 MODELES POUR LES PLANS A<G>*T.....
 3.1 Analyse d'une comparaison W/T1: modèles M_G/T1.....
 3.2 Analyse d'une comparaison W/G1: modèles M_G.M.....
 3.3 Analyse d'une comparaison W.M.....
 4 RESUME DES SOLUTIONS DU CHAPITRE.....

* * *

2 LE MODELE MULTINORMAL DES GROUPES SEPARES

* 2.1 DEFINITION ET THEOREME FONDAMENTAL

On considère un support (fini) J<K> (J emboîté dans K), muni d'une pondération (n_{j<k>εJ<K>})_{j<k>εJ<K>}; la pondération (n_{j<k>εJ<K>})_{j<k>εJ<K>} est supposée uniforme, mais la pondération dérivée (n_k)_{kεK} où n_k = ∑_{j<k>εJ<K>} n_{j<k>} est quelconque. On notera J_k pour card(j<k>) (nombre de modalités de J affectées à k) et K pour card(K) (nombre de modalités de K).

Soit le protocole p-numérique:

$$J<K> \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$j<k> \mapsto \mathbf{y}^{j<k>} \quad \text{vecteur à } p \text{ lignes}$$

2.1.1 Définition

Poser pour le protocole (y^{j<k>})_{j<k>εJ<K>} le modèle "multinormal des groupes séparés" revient à supposer que:

- (i) les variables y^{j<k>} sont indépendantes
 - ⋮
 - ⋮
 - ⋮
 - ⋮
 - (ii) chaque variable y^{j<k>}, pour k donné, a la distribution multinormale
- $$\mathbf{y}^{j<k>} | \pi \sim N(\boldsymbol{\theta}^k, \boldsymbol{\Sigma}^k(p)) \quad \text{avec } \det(\boldsymbol{\Sigma}^k(p)) > 0 \quad k \in K \quad j<k> \in J<K>$$

2.1.2 Théorème fondamental

Définissons pour chaque k les statistiques:

$$\mathbf{y}^k = \frac{1}{J_k} \sum_{j<k> \in J<K>} \mathbf{y}^{j<k>} \quad (\text{vecteur à } p \text{ lignes})$$

$$\mathbf{V}^k = \sum_{j<k> \in J<K>} \mathbf{y}^{j<k>} \mathbf{y}^{j<k>' } - J_k \mathbf{y}^k \mathbf{y}^{k'} \quad (\text{matrice } p \times p)$$

$$S_k^2 = \frac{1}{(J_k - 1)p} \sum_{j<k> \in J<K>} \mathbf{y}^{j<k>} \mathbf{y}^{j<k>} - J_k \mathbf{y}^k \mathbf{y}^{k'} = \frac{1}{(J_k - 1)p} \text{tr}(\mathbf{V}^k)$$

où tr désigne la trace de la matrice (somme des éléments disposés sur la diagonale)

Théorème - Pour k donné, une condition nécessaire et suffisante pour que le couple (y^k, S_k²) ait la structure statistique "multinormale - khi-deux" est que la matrice $\boldsymbol{\Sigma}^k(p)$ soit de la forme $\sigma_k^2 \mathbf{I}_p$; sous cette condition, on a alors:

$$\begin{aligned} & \parallel (i) \mathbf{y}^k \perp\!\!\!\perp s_k^2 \mid \boldsymbol{\pi} \\ & \parallel (ii) \mathbf{y}^k \mid \boldsymbol{\pi} \sim N_p \left(\boldsymbol{\theta}^k, \frac{1}{J_k} \sigma_k^2 \mathbf{I}_p \right) \quad \sigma_k \in \mathbb{R} \quad \sigma_k > 0 \\ & \parallel (iii) s_k^2 \mid \boldsymbol{\pi} \sim \sigma_k^2 \frac{\chi_{(J_k-1)p}^2}{(J_k-1)p} \end{aligned}$$

Preuve - Des hypothèses du modèle "multinormal des groupes séparés", on déduit, en appliquant un théorème classique (cf Rao, 1965, page 454):

$$\begin{aligned} & (i)' \mathbf{y}^k \perp\!\!\!\perp \mathbf{v}^k \mid \boldsymbol{\pi} \\ & (ii)' \mathbf{y}^k \mid \boldsymbol{\pi} \sim N_p \left(\boldsymbol{\theta}^k, \frac{1}{J_k} \boldsymbol{\Sigma}^k(p) \right) \\ & (iii)' \mathbf{v}^k \mid \boldsymbol{\pi} \sim N_{p, J_k-1} \left(\boldsymbol{\delta}^k(p) \right) \end{aligned}$$

(i) est impliqué par (i)'.

Clairement une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait (ii)

est que $\boldsymbol{\Sigma}^k(p) = \sigma_k^2 \mathbf{I}_p$.

On montre alors que cette dernière condition entraîne (iii): on a en effet $\mathbf{v}^k \mid \boldsymbol{\pi} \sim N_{p, J_k-1}(\sigma_k^2 \mathbf{I}_p)$ qui implique (iii) d'après le Lemme 2.3.2 du chapitre deux.

Remarque - Nous avons vu que (ii) entraîne à lui seul la nécessité de la condition. On peut également montrer le même résultat en ce qui concerne (iii): s_k^2 a une distribution khi-deux si et seulement si $\boldsymbol{\Sigma}^k(p) = \sigma_k^2 \mathbf{I}_p$.

* 2.2 COROLLAIRES

2.2.1 Corollaire 1

Soit \mathbf{M} une matrice à p lignes et m colonnes ($m \leq p$), telle que $\mathbf{M}'\mathbf{M} = \mathbf{I}_m$. Définissons $\boldsymbol{\delta}^k = \mathbf{M}'\mathbf{y}^k$ (variable m-numérique).

Pour k donné, sous le modèle "multinormal des groupes séparés", si la matrice $\boldsymbol{\Sigma}^k(p)$ est de la forme $\sigma_k^2 \mathbf{I}_p$, alors on a pour $\boldsymbol{\delta}^k$ et s_k^2 la structure statistique "m-normale - khi-deux":

$$\begin{aligned} & (i) \boldsymbol{\delta}^k \perp\!\!\!\perp s_k^2 \mid \boldsymbol{\pi} \\ & (ii) \boldsymbol{\delta}^k \mid \boldsymbol{\pi} \sim N_m \left(\boldsymbol{\delta}^k, \frac{1}{J_k} \sigma_k^2 \mathbf{I}_m \right) \quad \text{où } \boldsymbol{\delta}^k = \mathbf{M}'\boldsymbol{\theta}^k \end{aligned}$$

$$\parallel (iii) s_k^2 \mid \boldsymbol{\pi} \sim \sigma_k^2 \frac{\chi_{(J_k-1)p}^2}{(J_k-1)p}$$

Preuve - Il s'agit d'une conséquence du théorème précédent.

2.2.2 Corollaire 2

Soit \mathbf{M} une matrice à p lignes et m colonnes ($m \leq p$), telle que $\mathbf{M}'\mathbf{M} = \mathbf{I}_m$. Définissons $\boldsymbol{\delta}$ et s^2 de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= \frac{\sum_{k \in K} \mathbf{M}'\mathbf{y}^{j \langle k \rangle}}{\sum_{k \in K} J_k} = \frac{\sum_{k \in K} J_k \boldsymbol{\delta}^k}{\sum_{k \in K} J_k} \quad \text{où } \boldsymbol{\delta}^k \text{ est défini comme dans le} \\ s^2 &= \frac{\sum_{k \in K} (J_k - 1) s_k^2}{\sum_{k \in K} (J_k - 1)} \quad \text{(moyenne des } s_k^2 \text{ pondérés par leurs nombres} \\ & \quad \text{de degrés de liberté)} \end{aligned}$$

Sous le modèle "multinormal des groupes séparés", si chaque matrice $\boldsymbol{\Sigma}^k(p)$ est de la forme $\sigma_k^2 \mathbf{I}_p$, alors on a pour $\boldsymbol{\delta}$ et s^2 la structure statistique "m-normale - khi-deux":

$$\begin{aligned} & \parallel (i) \boldsymbol{\delta} \perp\!\!\!\perp s^2 \mid \boldsymbol{\pi} \\ & \parallel (ii) \boldsymbol{\delta} \mid \boldsymbol{\pi} \sim N_m \left(\boldsymbol{\delta}, \frac{1}{\sum_{k \in K} J_k} \sigma^2 \mathbf{I}_m \right) \\ & \quad \text{où } \boldsymbol{\delta} = \frac{\sum_{k \in K} J_k \boldsymbol{\delta}^k}{\sum_{k \in K} J_k} \quad (\boldsymbol{\delta}^k \text{ étant défini comme dans le} \\ & \quad \quad \quad \text{corollaire 1)} \\ & \parallel (iii) s^2 \mid \boldsymbol{\pi} \sim \sigma^2 \frac{\chi_q^2}{q} \quad \text{avec } q = \sum_{k \in K} (J_k - 1)p \end{aligned}$$

Preuve - Il s'agit d'une conséquence du corollaire 1.

2.2.3 Corollaire 3

Soit \mathbf{M} une matrice à p lignes et m_0 colonnes ($m_0 \leq p$) telle que $\mathbf{M}'\mathbf{M} = \mathbf{I}_{m_0}$. Définissons $\boldsymbol{\delta}_0 = \mathbf{M}'\mathbf{y}^k$ et notons $\boldsymbol{\delta}_0^K$ le vecteur à $K \times m_0$ lignes constitué par les $\boldsymbol{\delta}_0^k$, k parcourant K, "mis bout à bout".

Soit \mathbf{V} une matrice à K lignes et m_1 colonnes ($m_1 \leq p$) telle que $\mathbf{V}'\mathbf{J}_K^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{b}\mathbf{I}_{m_1}$ ($\mathbf{b} > 0$), où \mathbf{J}_K est la matrice carrée diagonale dont les éléments diagonaux sont les coefficients J_k .

Définissons alors $\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{V}'\boldsymbol{\alpha}\mathbf{I}_{m_0})\boldsymbol{\delta}_0^K$ (vecteur à $m_0 m_1$ lignes), où $\boldsymbol{\alpha}$ désigne le produit direct de matrices, ainsi que $m = m_0 m_1$.

Sous le modèle "multinormal des groupes séparés", si chaque matrice $\Sigma_{(p)}^k$ est de la forme $\sigma^2 \mathbf{I}_p$, alors on a pour \mathbf{d} et s^2 (défini comme dans le corollaire 2) la structure statistique "m-normale - khi-deux":

$$\begin{aligned} & \text{||| (i) } \mathbf{d} \perp\!\!\!\perp s^2 \mid \pi \\ & \text{(ii) } \mathbf{d} \mid \pi \sim N_m(\boldsymbol{\delta}, b\sigma^2 \mathbf{I}_m) \\ & \text{|||} \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\delta} = (V' \mathbf{K} \mathbf{I}_{m_0}) \boldsymbol{\delta}_0$, $\boldsymbol{\delta}_0^K$ étant le vecteur à $K \times m_0$ lignes constitué par les $M' \theta^k$

$$\text{||| (iii) } s^2 \mid \pi \sim \sigma^2 \frac{\chi^2_q}{q} \quad \text{avec } q = \sum_{k \in K} (J_k - 1)p$$

Preuve - Sous la condition $\Sigma_{(p)}^k = \sigma^2 \mathbf{I}_p$, on a, en appliquant les corollaires 1 et 2, (i) et (iii) et, encore, pour chaque k:

$$\mathbf{d}_0^k \mid \pi \sim N_{m_0} (M' \theta^k, \frac{1}{J_k} \sigma^2 \mathbf{I}_{m_0})$$

ce qui, en raison de l'indépendance des variables $\mathbf{d}_0^k \mid \pi$, peut encore être écrit

$$\mathbf{d}_0^k \mid \pi \sim N_{m_0} (\boldsymbol{\delta}_0^K, \sigma^2 \mathbf{J}_K^{-1} \mathbf{K} \mathbf{I}_{m_0})$$

On en déduit:

$$(V' \mathbf{K} \mathbf{I}_{m_0}) \mathbf{d}_0^k \mid \pi \sim N_{m_0 m_1} ((V' \mathbf{K} \mathbf{I}_{m_0}) \boldsymbol{\delta}_0^K, \sigma^2 (V' \mathbf{K} \mathbf{I}_{m_0}) (\mathbf{J}_K^{-1} \mathbf{K} \mathbf{I}_{m_0}) (V' \mathbf{K} \mathbf{I}_{m_0}))$$

d'où (ii) en notant que $(V' \mathbf{K} \mathbf{I}_{m_0}) (\mathbf{J}_K^{-1} \mathbf{K} \mathbf{I}_{m_0}) (V' \mathbf{K} \mathbf{I}_{m_0}) = b \mathbf{I}_{m_0 m_1} = b \mathbf{I}_m$.

* 2.3 UN CAS PARTICULIER: LE MODELE "NORMAL DES GROUPES SEPARÉS"

2.3.1 Définition

Dans le cas particulier où $p = 1$, le modèle précédent se réduit au modèle "normal des groupes séparés" (qui, si $K = 1$, se réduit lui-même au modèle normal usuel):

$$\begin{aligned} & \text{||| (i) } \perp\!\!\!\perp (y^{j \langle k \rangle})_{j \langle k \rangle \in J \langle K \rangle} \mid \pi \\ & \text{||| (ii) } y^{j \langle k \rangle} \mid \pi \sim N(\theta^k, \sigma^2) \quad \sigma > 0 \quad k \in K \quad j \langle k \rangle \in J \langle K \rangle \end{aligned}$$

y^k et s_k^2 sont donnés par

$$y^k = \frac{1}{J_k} \sum_{j \langle k \rangle \in J \langle K \rangle} y^{j \langle k \rangle}$$

$$s_k^2 = \frac{1}{J_k - 1} \left(\sum_{j \langle k \rangle \in J \langle K \rangle} y^{j \langle k \rangle^2} - J_k y^k \right) = \frac{1}{J_k - 1} \left(\sum_{j \langle k \rangle \in J \langle K \rangle} (y^{j \langle k \rangle} - y^k)^2 \right)$$

et, toujours

$$s^2 = \frac{\sum_{k \in K} (J_k - 1) s_k^2}{\sum_{k \in K} (J_k - 1)}$$

Nous énoncerons simplement le corollaire suivant du théorème fondamental, qui est un cas particulier du corollaire 3.

2.3.2 Corollaire 4

Soit V une matrice à K lignes et m colonnes ($m \leq K$), telle que $V' V \mathbf{J}_K^{-1} V = b \mathbf{I}_m$ ($b > 0$). Définissons $\mathbf{d} = V' \mathbf{y}^k$, où \mathbf{y}^k est le vecteur à K lignes constitué par les y^k .

Sous le modèle "normal des groupes séparés", si chaque paramètre σ_k^2 est égal à σ^2 , alors on a pour \mathbf{d} et s^2 la structure statistique "m-normale - khi-deux":

$$\begin{aligned} & \text{||| (i) } \mathbf{d} \perp\!\!\!\perp s^2 \mid \pi \\ & \text{(ii) } \mathbf{d} \mid \pi \sim N_m(\boldsymbol{\delta}, b\sigma^2 \mathbf{I}_m) \\ & \text{|||} \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\delta} = V' \theta^K$, θ^K étant le vecteur à K lignes constitué par les θ^k

$$\text{||| (iii) } s^2 \mid \pi \sim \sigma^2 \frac{\chi^2_q}{q} \quad \text{avec } q = \sum_{k \in K} (J_k - 1)$$

Preuve - Il s'agit d'un cas particulier du corollaire 3 avec $p = 1$ et, par suite, $M \equiv 1$, $m_0 = 1$, $m_1 = m$.

* *

3 MODELES POUR LES PLANS $A \langle G \rangle * T$

Nous noterons $G = \text{card}(G)$, $A_g = \text{card}(A \langle G \rangle)$, $T = \text{card}(T)$.

A chaque modalité $a \langle g \rangle t$ appartenant à $A \langle G \rangle * T$ correspond l'observation $x^{a \langle g \rangle t}$.

Pour chaque $a \langle g \rangle$ appartenant à $A \langle G \rangle$, les T observations $x^{a \langle g \rangle t}$ correspondantes (t parcourant T) seront représentées sous forme d'un vecteur à T lignes $x^{a \langle g \rangle * T}$, dont la ligne t est $x^{a \langle g \rangle t}$.

Selon nos conventions, les variables correspondantes seront représentées par des lettres en italique: $x^{a \langle g \rangle t}$, $x^{a \langle g \rangle * T}$.

En ce qui concerne les paramètres (écrits en lettres grecques), nous supposons l'existence de tous les moments d'ordre 1 et 2 (moyennes, variances et covariances). Plus précisément, nous poserons, pour chaque g appartenant à G :

$$\text{Moy}(x^{a \langle g \rangle t} | \pi) = \mu_g^t$$

$$\text{Cov}(x^{a \langle g \rangle t'} | \pi, x^{a \langle g \rangle t''} | \pi) = \sigma^{g t' t''}$$

Pour chaque modalité g appartenant à G , les moyennes correspondantes seront représentées sous forme d'un vecteur à T lignes μ_g^{*T} dont la ligne t est μ_g^t ; on aura donc:

$$\text{Moy}(x^{a \langle g \rangle * T} | \pi) = \mu_g^{*T}$$

Pour chaque modalité g appartenant à G , les variances et covariances correspondantes seront représentées sous forme d'une matrice carrée (symétrique) $T \times T$ notée Σ_g^T , dont l'élément correspondant au couple (t', t'') est $\sigma^{g t' t''}$; on aura donc:

$$\text{Cov}(x^{a \langle g \rangle * T} | \pi) = \Sigma_g^T \quad ((T) \text{ rappelle la taille de la matrice})$$

* 3.1 ANALYSE D'UNE COMPARAISON $W/T1$: MODELES $M_{G/T1}$

Etant donné une comparaison W (ou un contraste) sur G , conditionnelle à $T1$, on se ramènera de manière assez naturelle à un plan dérivé du type $A \langle G \rangle$ en moyennant sur $T1$ (dans le cas particulier où $T1$ consiste en un seul traitement t on considérerait naturellement les observations relatives à ce seul traitement).

En règle générale, la comparaison W ne fera pas intervenir G tout entier, mais seulement une partie $G1$ de G (le support de la comparaison W): le protocole dérivé pertinent "le plus spécifique" apparaît donc être un

protocole de support $A \langle G1 \rangle$, pour lequel on posera une version du modèle "normal des groupes séparés" notée $M_{G1/T1}$.

Si $G1$ est strictement inclus dans G , d'autres modèles peuvent être envisagés, en étendant le protocole dérivé pertinent à un support $A \langle \tilde{G} \rangle$ (où $G1 \subset \tilde{G} \subset G$), ce qui introduira bien entendu des conditions de validité supplémentaires (conditions d'homogénéité des variances).

D'une manière générale, nous considérerons donc, pour l'analyse d'une comparaison $W/T1$, des modèles du type $M_{G/T1}$, incluant les cas particuliers $\tilde{G} = G1$ et $\tilde{G} = G$ (éventuellement confondus si $G1 = G$).

3.1.1 Dérivation naturelle

On considérera le protocole dérivé par moyennage qui, à toute modalité $a \langle g \rangle$ appartenant à $A \langle G \rangle$, associe la moyenne sur $T1$ des observations $x^{a \langle g \rangle t}$:

$$a \langle g \rangle \mapsto x^{a \langle g \rangle / T1} = \frac{1}{T1} \sum_{t \in T1} x^{a \langle g \rangle t} \quad \text{en notant } T1 = \text{card}(T1)$$

Pour chaque g appartenant à G on notera:

$$x^{g/T1} = \frac{1}{A_g} \sum_{a \langle g \rangle \in A \langle g \rangle} x^{a \langle g \rangle / T1} \quad \text{moyenne pour } g \text{ des } x^{a \langle g \rangle / T1};$$

$$s^2_{A(g)/T1} = T1 \sum_{a \langle g \rangle \in A \langle g \rangle} (x^{a \langle g \rangle / T1} - x^{g/T1})^2$$

$$= T1 \left(\sum_{a \langle g \rangle \in A \langle g \rangle} x^{a \langle g \rangle / T1^2} - A_g x^{g/T1^2} \right) \quad \text{somme-des-carrés}$$

associée à la comparaison $A \langle g \rangle / T1$, à $A_g - 1$ degrés de liberté;

$$s^2_g = \frac{1}{A_g - 1} \frac{1}{T1} s^2_{A(g)/T1} \quad \text{variance-corrigée pour } g \text{ des } x^{a \langle g \rangle / T1}.$$

Enfin on notera $x^{G/T1}$ le vecteur à G lignes, dont la ligne g est $x^{g/T1}$.

3.1.2 Statistiques pour l'analyse bayésienne de la comparaison $W/T1$

Soit une matrice V , à G lignes et m colonnes représentant la comparaison W , telle que $V' N_{G/T1}^{-1} V = \frac{1}{k} I_m$ (k constante positive); $N_{G/T1}$ est ici la matrice diagonale $G \times G$, dont les éléments diagonaux sont les effectifs $A_g T1$, coefficients de la mesure fondamentale sur G conditionnellement à $T1$. Cette matrice constitue donc une base orthogonale de la comparaison $W/T1$.

Définissons les statistiques:

$$d = V' x^{G/T1} \quad \text{représentant de l'effet observé de la comparaison } W/T1;$$

$$s^2 = \frac{1}{q T1} \frac{\sum_{g \in G} s^2_{A(g)/T1}}{\sum_{g \in G} (A_g - 1)} = \frac{\sum_{g \in G} (A_g - 1) s^2_g}{\sum_{g \in G} (A_g - 1)} \quad \text{où, } G1 \text{ désignant le support de}$$

la comparaison W , $G1 \subset \tilde{G} \subset G$, et où q est défini comme

$$q = \sum_g (\Lambda_g - 1) \frac{g \in \tilde{G}}{g}$$

On remarquera qu'on a encore $s^2 = \frac{1}{T_1} \sum_g m_g(\tilde{G})/T_1$.

3.1.3 Modèle $M_{\tilde{G}/T_1}^z$

(1) On considère le protocole dérivé défini par l'application:
 $a \langle g \rangle \in \Lambda \langle \tilde{G} \rangle \mapsto x^{a \langle g \rangle} / T_1$

(2) On pose pour ce protocole dérivé le modèle normal des groupes séparés:

$$(i) \prod_{a \langle g \rangle \in \Lambda \langle \tilde{G} \rangle} (x^{a \langle g \rangle} / T_1) \mid \pi$$

$$(ii) x^{a \langle g \rangle} / T_1 \mid \pi \sim N(\mu_g / T_1, \sigma_g^2) \quad a \langle g \rangle \in \Lambda \langle \tilde{G} \rangle$$

dont les paramètres se définissent à partir des paramètres de base comme

$$\mu_g / T_1 = \frac{1}{T_1} \sum_{t \in T_1} \mu^{gt} \quad \text{moyenne sur } T_1 \text{ des moyennes } \mu^{gt}$$

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{T_1^2} \sum_{t, t' \in T_1 \times T_1} \sigma^{gt' t''} \quad \text{moyenne des variances et covariances correspondant au groupe } g \text{ et à l'ensemble } t_1 \text{ des traitements.}$$

On notera μ_{G/T_1} le vecteur à G lignes sont la ligne g est μ_g / T_1 .

(3) On suppose la condition d'homogénéité des paramètres σ_g^2 :

$$(Vg \in \tilde{G}) \quad \sigma_g^2 = \sigma^2$$

Remarque - La condition d'homogénéité (3) dépend du choix de \tilde{G} . On

observera que, si le modèle $M_{\tilde{G}/T_1}^z$ est satisfait, il en est bien entendu de même du modèle $M_{\tilde{G}'/T_1}^z$ où \tilde{G}' est un sous-ensemble de \tilde{G} ; symboliquement:

$$\text{si } \tilde{G}' \in \tilde{G} \quad M_{\tilde{G}'/T_1}^z \rightarrow M_{\tilde{G}/T_1}^z$$

En particulier

$$M_{G/T_1}^z \rightarrow M_{\tilde{G}/T_1}^z \rightarrow M_{G_1/T_1}^z$$

En revanche, si le modèle $M_{\tilde{G}/T_1}^z$ est satisfait, on ne peut rien dire du modèle $M_{\tilde{G}/T_1}$ où \tilde{T} est un autre sous-ensemble de T; il n'y a en fait ici aucun intérêt à considérer un tel modèle.

3.1.4 Solutions pour l'analyse bayésienne d'une comparaison W/T1

Les solutions sont données par le théorème suivant.

Théorème - Sous le modèle $M_{\tilde{G}/T_1}^z$, on a pour d et s^2 la structure statistique spécifique "n-normale - khi-deux":

$$d \mid \prod_{a \langle g \rangle \in \Lambda \langle \tilde{G} \rangle} (x^{a \langle g \rangle} / T_1) \quad \text{avec } b = \frac{T_1}{k}$$

où $\delta = V^* \mu_{G/T_1}$ est le représentant de l'effet théorique de la comparaison W/T1

$$s^2 \mid \pi \sim \chi^2_{\frac{q}{q}} \quad \text{avec } q = \sum_g (\Lambda_g - 1) \frac{g \in \tilde{G}}{g}$$

Corollaire: analyse bayésienne d'un contraste V_{G'/T_1} - Sous le modèle $M_{\tilde{G}/T_1}^z$, on a pour $d = \sum_{g \in G'} v^g x^{g/T_1}$, effet observé du contraste, et s^2 la structure statistique spécifique "normale - khi-deux":

$$d \mid \prod_{a \langle g \rangle \in \Lambda \langle \tilde{G} \rangle} (x^{a \langle g \rangle} / T_1) \quad \text{avec } b = \sum_g \frac{v^g}{g \in G' A_g}$$

où $\delta = \sum_{g \in G'} v^g \mu_{G'/T_1}$ est l'effet théorique du contraste

$$s^2 \mid \pi \sim \chi^2_{\frac{q}{q}} \quad \text{avec } q = \sum_g (\Lambda_g - 1) \frac{g \in \tilde{G}}{g}$$

Preuve - On applique les résultats de l'étude du modèle "multinomial des groupes séparés" (théorème fondamental, corollaire 4), avec $J \langle K \rangle = A \langle \tilde{G} \rangle / T_1$, la matrice V du corollaire étant la matrice à card(\tilde{G}) lignes et m colonnes obtenues en retenant les lignes correspondant à \tilde{G} dans la matrice V (les lignes enlevées, s'il y a lieu, ne contenant bien entendu que des 0).

On a $V^* N_{G'/T_1}^{-1} V = \frac{1}{k} I_m$, d'où $V^* J \langle K \rangle^{-1} V = \frac{1}{k} I_m$, soit $b = \frac{T_1}{k}$. Dans le cas particulier où $m = 1$ (corollaire) on a $V^* N_{G'/T_1}^{-1} V = \sum_g \frac{v^g}{g \in G' A_g} I_{T_1}$, d'où $b = \sum_g \frac{v^g}{g \in G' A_g}$.

* 3.2 ANALYSE D'UNE COMPARAISON W/G1: MODELES $M_{G, \tilde{M}}^z$

Etant donné une comparaison W (ou un contraste) sur T, on se ramènera de manière assez naturelle à un plan dérivé du type $\Lambda \langle G \rangle$, en dérivant le protocole (multinomial) qui, à chaque modalité $a \langle g \rangle$, associe le représentant de l'effet observé de la comparaison W pour cette modalité (l'effet observé dans le cas d'un contraste, le protocole dérivé étant alors numérique).

La comparaison étant conditionnelle à G1, le protocole dérivé pertinent "le plus spécifique" apparaît donc être un protocole de support $\Lambda \langle G1 \rangle$ pour lequel on posera une version du modèle "multinomial des groupes séparés", notée $M_{G1, W}$.

Si G1 est strictement inclus dans G ou si W n'est pas la comparaison globale T sur T, d'autres modèles peuvent être envisagés:

- en étendant le protocole dérivé pertinent à un support A<G> (où G1 ⊂ G), d'où des modèles du type M_{G,W}, qui introduisent bien entendu des conditions de validité supplémentaires (conditions d'homogénéité);

- en considérant une sous-comparaison W̃ de T, dont W est elle-même une sous-comparaison, et en dérivant le protocole qui, à chaque modalité a<g>, associe le représentant de l'effet observé de la comparaison W̃ pour cette modalité, d'où des modèles du type M_{G1,W̃}, qui introduisent des conditions de validité supplémentaires.

D'une manière générale, en combinant ces deux types d'extensions, nous considérerons donc, pour l'analyse d'une comparaison W/G1, des modèles du type M_{G,W̃}, incluant les cas particuliers G̃ = G1 et G̃ = G (éventuellement confondus si G1 = G) et, indépendamment, W̃ = W et W̃ = T (éventuellement confondus si W = T).

3.2.1 Dérivation naturelle

Soit W une matrice, à T lignes et m colonnes, représentant la comparaison W, telle que W'N_{T/G1}⁻¹W = $\frac{1}{k} \mathbf{I}_m$ (k constante positive); N_{T/G1} est ici la matrice diagonale T×T dont les éléments diagonaux sont les effectifs $\sum_{g \in G1} A_g$, coefficients de la mesure fondamentale sur T conditionnellement à G1 (d'où W'W = $\frac{1}{k} \sum_{g \in G1} A_g \mathbf{I}_m$). Cette matrice correspond donc à une base orthogonale de la comparaison W/G1; elle correspond d'ailleurs à une base orthogonale de la comparaison W, quelle que soit la partie de A<G> sur laquelle on conditionne cette comparaison (la mesure fondamentale sur T conditionnellement à toute partie de A<G> étant uniforme).

On considérera naturellement le protocole dérivé qui, à toute modalité a<g>, associe le représentant de l'effet observé de la comparaison W pour cette modalité (protocole multinumérique):

$$a\langle g \rangle \mapsto \mathbf{d}^{a\langle g \rangle} = \mathbf{W}' \mathbf{x}^{a\langle g \rangle * T}$$

Pour chaque g appartenant à G, on notera:

$$\mathbf{d}^g = \frac{1}{A} \sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} \mathbf{d}^{a\langle g \rangle} \quad \text{représentant de l'effet observé de la comparaison W pour le groupe g;}$$

$$s_{A(g)}^C \cdot \mathbf{W} = \frac{k}{\sum_{g \in G1} A} \left(\sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} \mathbf{d}^{a\langle g \rangle} \mathbf{d}^{a\langle g \rangle'} - A_g \mathbf{d}^g \mathbf{d}^g' \right)$$

$$= \frac{k}{\sum_{g \in G1} A} \text{tr} \left(\sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} \mathbf{d}^{a\langle g \rangle} \mathbf{d}^{a\langle g \rangle'} - A_g \mathbf{d}^g \mathbf{d}^g' \right) \quad \text{somme-dés-carrés}$$

associée à la comparaison A(g).W, à (A-1)_g degrés de liberté.

$$s_g^2 = \frac{1}{(A-1)_m} \frac{1}{k} \left(\sum_{g \in G1} A \right) s_{A(g)}^C \cdot \mathbf{W}$$

3.2.2 Autres dérivations

Soit W̃ une comparaison, à dl(W̃) degrés de liberté, sur T, dont W est une sous-comparaison (le cas précédent est donc inclus comme cas particulier: W̃ = W); et soit W̃ une matrice à T lignes et dl(W̃) colonnes représentant la comparaison W̃ telle que W̃'N_{T/G1}⁻¹W̃ = $\frac{1}{k} \mathbf{I}_{dl(W̃)}$ (par analogie avec le choix de W).

On considère le protocole dérivé qui, à toute modalité a<g> associe $\mathbf{y}^{a\langle g \rangle} = \mathbf{W}' \mathbf{x}^{a\langle g \rangle * T}$.

Pour chaque g appartenant à G, on notera:

$$\mathbf{y}^g = \frac{1}{A} \sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} \mathbf{y}^{a\langle g \rangle}$$

$$s_{A(g)}^C \cdot \mathbf{W} = \frac{k}{\sum_{g \in G1} A} \left(\sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} \mathbf{y}^{a\langle g \rangle} \mathbf{y}^{a\langle g \rangle'} - A_g \mathbf{y}^g \mathbf{y}^g' \right)$$

$$= \frac{k}{\sum_{g \in G1} A} \text{tr} \left(\sum_{a\langle g \rangle \in A\langle g \rangle} \mathbf{y}^{a\langle g \rangle} \mathbf{y}^{a\langle g \rangle'} - A_g \mathbf{y}^g \mathbf{y}^g' \right)$$

On notera encore:

$$s_g^2 = \frac{1}{(A-1)dl(W̃)} \frac{1}{k} \left(\sum_{g \in G1} A \right) s_{A(g)}^C \cdot \mathbf{W}$$

3.2.3 Statistiques pour l'analyse bayésienne de la comparaison W/G1

Définissons les statistiques:

$$\mathbf{d} = \frac{\sum_{a\langle g \rangle \in A\langle G1 \rangle} \mathbf{d}^{a\langle g \rangle}}{\sum_{g \in G1} A} = \frac{\sum_{g \in G1} A_g \mathbf{d}^g}{\sum_{g \in G1} A} \quad \text{représentant de l'effet observé de la comparaison W/G1}$$

$$s^2 = \frac{1}{q} \frac{1}{k} \left(\sum_{g \in G1} A \right) \sum_{g \in G} s_{A(g)}^C \cdot \mathbf{W} = \frac{\sum_{g \in G} (A-1) s_g^2}{\sum_{g \in G} (A-1)}$$

où G1 ⊂ G

avec $q = \sum_{g \in G1} (A-1) dl(W̃)$

On a encore $s^2 = \frac{1}{k} \sum_{g \in G1} A_g \mathbf{M}_{A(g)}^C \cdot \mathbf{W}$

3.2.4 Modèle $M_{\tilde{G}, \tilde{W}}$

(1) On considère le protocole défini par l'application:

$$a \langle g \rangle \in A \langle \tilde{G} \rangle \rightarrow y \langle a \langle g \rangle \rangle$$

(2) On pose pour ce protocole dérivé le modèle multinomial des groupes séparés:

$$(i) \prod (y \langle a \langle g \rangle \rangle)_{a \langle g \rangle \in A \langle \tilde{G} \rangle} | \pi$$

$$(ii) y \langle a \langle g \rangle \rangle | \pi \sim M_{d1(\tilde{W})}(\nu_g^g, \Sigma_{d1(\tilde{W})}^g) \quad a \langle g \rangle \in A \langle \tilde{G} \rangle$$

dont les paramètres se définissent à partir des paramètres de base comme

$$\nu_g^g = W^T \mu_g \Sigma^T$$

$$\Sigma_{d1(\tilde{W})}^g = W^T \Sigma_{d1(\tilde{W})}^g W$$

(3) On suppose que chacune des matrices $\Sigma_{d1(\tilde{W})}^g$ est de la forme $\sigma_g^2 I_{d1(\tilde{W})}$

(4) On suppose la condition d'homogénéité des paramètres σ_g^2 :

$$(\forall g \in \tilde{G}) \sigma_g^2 = \sigma^2$$

Remarques

- L'axiome (3) exprime la condition dite "condition de circularité pour la comparaison \tilde{W} "; cette condition, pour un plan $A * T$, a été donnée par Rouanet et Lépine (1970); elle a été étendue aux plans $A \langle G \rangle * T$ (cas univarié) par Waisbroit (1977) (on trouvera également une généralisation partielle dans Mendoza, Toothaker et Crain (1976); plus récemment, elle a été généralisée au cas multivarié par Lecoutre (1981b) et par Thomas (1983).

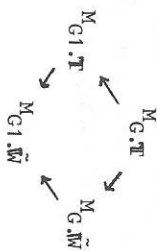
- On vérifie aisément que la condition de circularité ne dépend pas de la matrice particulière choisie pour représenter la comparaison \tilde{W} : cette condition est donc bien caractéristique de la comparaison \tilde{W} .
- On vérifie également que cette condition ne porte que sur les paramètres relatifs au plan dérivé $A \langle G \rangle * \tilde{T}$, où \tilde{T} est le support de la comparaison \tilde{W} .
- Pour toute comparaison \tilde{W} à un degré de liberté, la condition de circularité est trivialement satisfaite, $\tilde{W}^T \Sigma_{d1(\tilde{W})}^g \tilde{W}$ étant dans ce cas un scalaire.
- On vérifie encore que, si la condition de circularité est satisfaite pour une comparaison \tilde{W} , alors elle est satisfaite pour toute sous-comparaison

de \tilde{W} , avec le même σ^2 . En particulier, si la condition de circularité est satisfaite pour la comparaison globale sur T , alors elle est satisfaite pour toute comparaison sur T .

• L'axiome (3) dépend du choix de \tilde{G} , puisqu'il suppose que la condition de circularité est satisfaite pour chaque g appartenant à \tilde{G} .

• L'axiome (4) introduit en outre une condition d'homogénéité (l'égalité des σ_g^2) qui dépend également du choix de \tilde{G} .

• On aura donc notamment, pour les cas particuliers $\tilde{W} = T$ et $\tilde{G} = G$, le diagramme symbolique:



3.2.5 Solutions pour l'analyse bayésienne de la comparaison $W/G1$

Les solutions sont données par le théorème suivant.

Théorème - Sous le modèle $M_{\tilde{G}, \tilde{W}}$, on a pour d et s^2 la structure statistique spécifique "m-normale - khi-deux":

$$d \perp\!\!\!\perp s^2 | \pi$$

$$d | \pi \sim N(\delta, b \sigma^2 I_m) \quad \text{avec } b = \frac{1}{\sum_{g \in G1} A}$$

$$\text{où } \delta = \frac{\sum_{g \in G1} A \sum_{g \in G1} W^T \mu_g \Sigma^T}{\sum_{g \in G1} A} \quad \text{est le représentant de l'effet théorique de la comparaison } W/G1$$

$$s^2 | \pi \sim \frac{\chi_q^2}{q} \quad \text{avec } q = \sum_{g \in \tilde{G}} (A - 1) d1(\tilde{W})$$

Corollaire: analyse bayésienne d'un contraste $W_T/G1$ - Sous le modèle

$M_{\tilde{G}, \tilde{W}}$, on a pour

$$d = \frac{\sum_{g \in G1} A \langle g \rangle \sum_{g \in G1} A \langle g \rangle x}{\sum_{g \in G1} A}, \quad \text{effet observé du contraste,}$$

et s^2 la structure statistique spécifique "normale - khi-deux":

$$d \perp\!\!\!\perp s^2 | \pi$$

$$d | \pi \sim N(\delta, b \sigma^2) \quad \text{avec } b = \frac{1}{\sum_{g \in G1} A}$$

$$\delta = \frac{\sum_A \sum_{g \in G} w^{\mu} g^t}{\sum_A g \in G} \text{ est l'effet théorique du contraste}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{g \in G} \sum_{t \in T} w^{\mu} g^t}{g \in G} \text{ avec } q = \sum_g (A-1) dl(\tilde{W})$$

(on a dans ce cas $s^2 = \sum_{t \in T} w^2 cm(A(\tilde{G}), \tilde{W})$)

Preuve - On applique les résultats de l'étude du modèle "multinomial des groupes séparés" (théorème fondamental, corollaire 2), avec $J(K) = A(\tilde{G})/T1$; la matrice M du corollaire est déterminée de la manière suivante: W étant une sous-comparaison de \tilde{W} , il existe une matrice M à $dl(\tilde{W})$ lignes et m colonnes telle que $W = \tilde{W}M$; on en déduit que $d_{a \langle g \rangle} = M^t \tilde{W}^t x_{a \langle g \rangle * T} = W^t y_{a \langle g \rangle}$ et que $W^t W = M^t \tilde{W}^t \tilde{W} M = I_m$.

3.3 ANALYSE D'UNE COMPARAISON W, W

Etant donné une comparaison W, W , on se ramènera de manière assez naturelle à un plan dérivé du type $A \langle G \rangle$, en dérivant, comme pour une comparaison $W/G1$, le protocole qui, à chaque modalité $a \langle g \rangle$, associe le représentant de l'effet observé de la comparaison W pour cette modalité (l'effet observé dans le cas d'un contraste).

Si $G1$ désigne le support de la comparaison W , le protocole dérivé peritinent "le plus spécifique" apparaît donc être un protocole de support $A \langle G1 \rangle$, comme dans le cas d'une comparaison $W/G1$.

Nous considérerons donc, pour l'analyse d'une comparaison W, W , les modèles du type $M_{G, \tilde{W}}$ définis pour l'analyse d'une comparaison $W/G1$.

3.3.1 Choix d'une matrice représentant la comparaison W, W

Il convient d'abord de se donner une matrice U , à $G \times T$ lignes et m colonnes, représentant la comparaison W, W , telle que $U^t N_{G \times T}^{-1} U = \frac{1}{k} I_m$ (k constante positive); $N_{G \times T}$ est ici la matrice $G1 \times G1$ diagonale dont l'élément diagonal correspondant à gt est égal à A_g (ces éléments sont les coefficients de la mesure fondamentale sur $G \times T$).

Construisons cette matrice de la manière suivante.

• Soient $dl(W)$ contrastes $v_i = (v_i^j)_{g \in G}$ (j variant de 1 à $dl(W)$), constituant une matrice V , à T lignes et $dl(W)$ colonnes, représentant la comparaison W , telle que $V^t A_G^{-1} V = \frac{h}{k} I_{dl(W)}$, où A_G est la matrice diagonale $G \times G$ des effectifs A_g . La matrice V correspond donc à une base orthogonale de la comparaison W conditionnellement à n 'importe quelle partie de T (la mesure fondamentale sur G conditionnellement à toute partie de T étant proportionnelle à $(A_g)_{g \in G}$).

On notera que la matrice W correspond à une base orthogonale de la comparaison

comparaison (la mesure fondamentale sur T conditionnellement à toute partie de $A \langle G \rangle$ étant uniforme).

• Soient $dl(W)$ contrastes $v_i^j = (v_i^j)_{g \in G}$ (j variant de 1 à $dl(W)$), constituant une matrice V , à G lignes et $dl(W)$ colonnes, représentant la comparaison W , telle que $V^t A_G^{-1} V = \frac{h}{k} I_{dl(W)}$, où A_G est la matrice diagonale $G \times G$ des effectifs A_g . La matrice V correspond donc à une base orthogonale de la comparaison W conditionnellement à n 'importe quelle partie de T (la mesure fondamentale sur G conditionnellement à toute partie de T étant proportionnelle à $(A_g)_{g \in G}$).

• La matrice U est constituée des $m = dl(W) \times dl(W)$ contrastes $w_{G \times T}^{ji} = (w_{gt}^{ji})_{g \in G, t \in T}$, j variant de (1, 1) à $(dl(W), dl(W))$. On vérifie aisément que la matrice U ainsi construite satisfait la condition requise.

3.3.2 Dérivations

On procédera au même type de dérivations que dans le cas de l'analyse d'une comparaison $W/G1$. Simplement, en raison du choix de la matrice W , on remplacera $\frac{1}{k} \sum_{g \in G} A_g$ par $\frac{1}{h}$.

Soit donc une comparaison \tilde{W} , à $dl(\tilde{W})$ degrés de liberté, sur T , dont W est une sous-comparaison (avec le cas particulier $\tilde{W} = W$ correspondant à la "dérivation naturelle"); et soit \tilde{W} une matrice à T lignes et $dl(\tilde{W})$ colonnes représentant la comparaison \tilde{W} , telle que $\tilde{W}^t \tilde{W} = \frac{1}{h} I_{dl(\tilde{W})}$ (par analogie avec le choix de W).

On considèrera le protocole dérivé qui, à toute modalité $a \langle g \rangle$, associe $y_{a \langle g \rangle} = \tilde{W}^t x_{a \langle g \rangle * T}$.

Pour chaque g appartenant à G on notera (comme dans le cas d'une comparaison $W/G1$):

$$y_{a \langle g \rangle}^g = \frac{1}{A_g} \sum_{a \langle g \rangle \in A \langle g \rangle} y_{a \langle g \rangle}$$

$$s_{A(g), \tilde{W}}^2 = h \left(\sum_{a \langle g \rangle \in A \langle g \rangle} y_{a \langle g \rangle}^g - A_g y_{a \langle g \rangle}^g \right)$$

$$= h \times \text{tr} \left(\sum_{a \langle g \rangle \in A \langle g \rangle} y_{a \langle g \rangle} y_{a \langle g \rangle}^g - A_g y_{a \langle g \rangle}^g y_{a \langle g \rangle}^g \right)$$

$$s_g^2 = \frac{1}{(A-1) dl(\tilde{W})} \frac{1}{h} s_{A(g), \tilde{W}}^2$$

3.3.3 Statistiques pour l'analyse bayésienne d'une comparaison W.M
 Définissons les statistiques:

$$d = \mathbf{U}^T \mathbf{x}^{G*T} \text{ représentant de l'effet observé de la comparaison } W.M,$$

où \mathbf{x}^{G*T} est le vecteur à GT lignes dont la ligne correspondant à gt est $x^{gt} = \frac{1}{A_g} \sum_{A \in \langle g \rangle} x^{A \langle g \rangle}$

$$s^2 = \frac{1}{q} \frac{1}{h} \sum_{g \in \tilde{G}} \sum_{g \in \tilde{G}} s_{GC}^2 \Delta(g). \tilde{M} = \frac{\sum_{g \in \tilde{G}} (\Delta-1) s^2}{\sum_{g \in \tilde{G}} (\Delta-1)}$$

où, G1 désignant le support de la

comparaison W, G1 ∈ G̃G, et où q est défini comme

$$q = \sum_{g \in \tilde{G}} (\Delta-1) dl(\tilde{W})$$

$$\text{On a encore } s^2 = \frac{1}{h} cm \Delta(\tilde{G}). \tilde{M}$$

Il conviendra d'exprimer d en fonction des matrices V et W. Pour ce

faire, on commencera par remarquer que chaque ligne de d est de la forme $\sum_{gt} u_{j,gt} x^{gt} = \sum_{gt} v_{j,gt}^i x^{gt}$ qui est encore égal à $\sum_{gt} v_{j,gt}^i (\sum_{t \in T} w_{t,gt}^i x^{gt})$, soit sous forme d'écriture matricielle, en notant d_j^i le vecteur à G lignes constitué des $\sum_{gt} w_{t,gt}^i x^{gt}$: la ligne gt du vecteur d s'écrit $\sum_{j \in J} v_{j,gt}^i d_j^i$.

Par suite, en définissant $d_g^g = \mathbf{W}^T \mathbf{x}^{G*T}$ (vecteur à dl(W) lignes) et d_g^G le vecteur à Gdl(W) lignes constitué des d_g^g (g parcourant G), d s'écrit:

$$d = (\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{I}_{dl(W)} \mathbf{d}_g^G)$$

3.3.4 Modèle $M_{G.M}^2$

L'analyse d'une comparaison W.M requiert la même classe de modèles que l'analyse d'une comparaison W/G1

3.3.5 Solutions pour l'analyse bayésienne d'une comparaison W.M

Les solutions sont données par le théorème suivant.

Théorème - Sous le modèle $M_{G.M}^2$, on a pour d et s^2 la structure statistique spécifique "m-normale - khi-deux":

$$d \parallel s^2 | \pi$$

$$d | \pi \sim N(\delta, b \sigma^2 \mathbf{I}_m) \text{ avec } b = \frac{h}{k}$$

où $\delta = \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{G*T}$ est le représentant de l'effet théorique de la comparaison W.M (\mathbf{M}^{G*T} étant le vecteur à GT lignes dont la ligne correspondant à gt est μ^{gt})

$$s^2 | \pi \sim \sigma^2 \frac{\chi^2_q}{q} \text{ avec } q = \sum_{g \in \tilde{G}} (\Delta-1) dl(\tilde{W})$$

Corollaire: analyse bayésienne d'un contraste $\mathbf{V}_G \cdot \mathbf{W}_T$ - Sous le modèle $M_{G.M}^2$, on a pour $d = \sum_{gt} v_{gt} \sum_{t \in T} w_{t,gt} x^{gt}$, effet observé du contraste, et s^2 la structure statistique spécifique "normale - khi-deux":

$$d \parallel s^2 | \pi$$

$$d | \pi \sim N(\delta, b \sigma^2) \text{ avec } b = \sum_{g \in \tilde{G}} \frac{v_g^2}{A_g}$$

où $\delta = \sum_{gt} v_{gt} \sum_{t \in T} w_{t,gt} \mu^{gt}$ est l'effet théorique du contraste

$$s^2 | \pi \sim \sigma^2 \frac{\chi^2_q}{q} \text{ avec } q = \sum_{g \in \tilde{G}} (\Delta-1) dl(\tilde{W})$$

$$\text{(on a dans ce cas } s^2 = \sum_{t \in T} w_{t,gt}^2 cm \Delta(\tilde{G}). \tilde{M})$$

Preuve - On applique les résultats de l'étude du modèle "multinomial des groupes séparés" (théorème fondamental, corollaire 3), avec $J \langle K \rangle = A \langle \tilde{G} \rangle$. La matrice M est déterminée de la manière suivante: W étant une sous-comparaison de \tilde{W} , il existe une matrice M à dl(W) lignes et dl(W) colonnes telle que $\mathbf{W} = \mathbf{M} \mathbf{M}$; on en déduit que $d_g^g = \mathbf{W}^T \mathbf{x}^{G*T} = \mathbf{M}^T \mathbf{W}^T \mathbf{x}^{G*T} = \mathbf{M}^T \mathbf{g}^g$ et que $\mathbf{W}^T \mathbf{V} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}^T \mathbf{V}$, d'où $\mathbf{M}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_m$. La matrice V du corollaire est la matrice à card(G̃) lignes et dl(W) colonnes obtenue en retenant les lignes correspondant à G̃ dans la matrice V. On a $\mathbf{V}^T \mathbf{A}_G^{-1} \mathbf{V} = \frac{1}{k} \mathbf{I}_{dl(W)}$, donc $b = \frac{h}{k}$.

Dans le cas particulier où m = 1 (corollaire) on a $\mathbf{V}^T \mathbf{A}_G^{-1} \mathbf{V} = \frac{1}{k} = \sum_{g \in \tilde{G}} \frac{v_g^2}{A_g}$, d'où $b = \frac{h}{\sum_{g \in \tilde{G}} \frac{v_g^2}{A_g}}$

* * *

Le tableau 1 fournit un récapitulatif des résultats de ce chapitre, en fonction des différents types de contrastes ou de comparaisons envisagés. Il donne également dans chaque cas une formule pour calculer la valeur de l'indice d'échelle e dans la situation (notamment) où l'effet observé serait nul.

On voit, à la lecture de ce tableau, que les développements théoriques de ce chapitre ont conduit, dans chaque cas, non pas à un modèle unique, mais à toute une classe de modèles (caractérisés par le choix de \tilde{G} et éventuellement \tilde{W}). En fait, dans la pratique, le choix du modèle d'échantillonnage se trouvera commandé par l'analyse descriptive; celle-ci, en obéissant à des raisons de pertinence, souvent assez naturelles, fixera les données spécifiques qui, pour chaque comparaison analysée, serviront de base à l'inférence spécifique pour cette comparaison et, par suite, détermineront le modèle d'échantillonnage à poser.

Le plus souvent, ces raisons de pertinence imposeront d'elles-mêmes le choix du modèle le plus spécifique (c'est-à-dire $\tilde{G} = G1$ et $\tilde{W} = W$), donc du modèle qui aura les exigences de validité minimales dans la classe de modèles envisagée.

* * *
* * *

Tableau 1 - Récapitulatif des résultats du chapitre IV

	modèle	s ²	q	F _{obs}	e ²
contraste $v_G/T1$	$M_{\tilde{G}/T1}$	$\frac{1}{T1} cm_A(\tilde{G})/T1$	$\sum_{g \in \tilde{G}} (A_g - 1)$	$\frac{cm_{v_G/T1}}{cm_{A(\tilde{G})/T1}}$	$\sum_{g \in G} \frac{v_g^2}{A_g T1} cm_{A(\tilde{G})/T1}$
contraste $w_T/G1$	$M_{\tilde{G}.\tilde{W}}$	$\sum_{t \in T} w_t^2 cm_{A(\tilde{G}).\tilde{W}}$	$\sum_{g \in \tilde{G}} (A_g - 1) d1(\tilde{W})$	$\frac{cm_{w_T/G1}}{cm_{A(\tilde{G}).\tilde{W}}}$	$\frac{\sum_{t \in T} w_t^2}{\sum_{g \in G1} A_g} cm_{A(\tilde{G}).\tilde{W}}$
contraste $v_G.w_T$	$M_{\tilde{G}.\tilde{W}}$	$\sum_{t \in T} w_t^2 cm_{A(\tilde{G}).\tilde{W}}$	$\sum_{g \in \tilde{G}} (A_g - 1) d1(\tilde{W})$	$\frac{cm_{v_G.w_T}}{cm_{A(\tilde{G}).\tilde{W}}}$	$\sum_{g \in G} \frac{v_g^2}{A_g} \sum_{t \in T} w_t^2 cm_{A(\tilde{G}).\tilde{W}}$
comparaison $W/T1$	$M_{\tilde{G}/T1}$	$\frac{1}{T1} cm_A(\tilde{G})/T1$	$\sum_{g \in \tilde{G}} (A_g - 1)$	$\frac{cm_W/T1}{cm_{A(\tilde{G})/T1}}$	$\frac{1}{m} \frac{1}{k} cm_{A(\tilde{G})/T1}$
comparaison $W/G1$	$M_{\tilde{G}.\tilde{W}}$	$\frac{1}{k} \sum_{g \in G1} A_g cm_{A(\tilde{G}).\tilde{W}}$	$\sum_{g \in \tilde{G}} (A_g - 1) d1(\tilde{W})$	$\frac{cm_W/G1}{cm_{A(\tilde{G}).\tilde{W}}}$	$\frac{1}{m} \frac{1}{k} cm_{A(\tilde{G}).\tilde{W}}$
comparaison $W.W$	$M_{\tilde{G}.\tilde{W}}$	$\frac{1}{h} cm_{A(\tilde{G}).\tilde{W}}$	$\sum_{g \in \tilde{G}} (A_g - 1) d1(\tilde{W})$	$\frac{cm_W.W}{cm_{A(\tilde{G}).\tilde{W}}}$	$\frac{1}{m} \frac{1}{k} cm_{A(\tilde{G}).\tilde{W}}$

Eclairez-nous dans ce marasme
Réconfortez-nous et chassez
L'angoisse des coeurs harassés
Ah! Rendez-nous l'enthousiasme!

Jean-Marc Bernard, "Anthologie"

CHAPITRE V

*

ILLUSTRATION DES PROCEDURES DE BASE

L'objectif principal de cette expérience est d'étudier votre dernière hypothèse. Pour cela, les sujets sont répartis en deux groupes: le premier groupe effectue la tâche sans apprentissage préalable, le second groupe avec apprentissage préalable. En outre, on fait en sorte que

* 1.1 ILLUSTRATION D'UNE DEMARCHE

Nous nous proposons dans ce chapitre de développer, à propos d'une expérience classique en psychologie, les solutions que l'Analyse Bayésienne des Comparaisons apporte aux problèmes soulevés par l'analyse des données expérimentales. Parmi ces problèmes, seront abordés successivement la *représentation formalisée* de l'expérience, le choix du *plan d'analyse*, la *planification des analyses spécifiques*, la *mise en oeuvre pratique* des procédures *descriptives* et *inférentielles* pour l'analyse spécifique des comparaisons. Il s'agira de proposer des solutions effectives, à la fois sur le plan théorique et sur le plan pratique, et à *valeur générale*; plus précisément il s'agira moins ici de discuter de manière approfondie les problèmes méthodologiques que d'*illustrer une démarche* reproductible dans une large classe de situations.

Dans ce but, nous nous limiterons dans ce chapitre aux *procédures de base*, qui peuvent être aisément mises en oeuvre et qui recouvrent les besoins les plus usuels (des procédures complémentaires seront développées au chapitre suivant).

* 1.2 UNE EXPERIENCE D'APPRENTISSAGE PERCEPTIF INCIDENT

L'expérience considérée est une *expérience d'apprentissage perceptif incident*. La tâche expérimentale consiste à relier par un trait de crayon les 26 lettres de l'alphabet disposées au hasard sur une feuille (les lettres étant toujours disposées de la même façon). Quand un sujet effectue cette tâche plusieurs fois de suite, on constate une diminution importante du temps mis pour relier toutes les lettres. On peut faire l'hypothèse que cette diminution est due à deux types d'apprentissage: 1) un apprentissage "*perceptif*", le sujet apprend la disposition spatiale des lettres; 2) un apprentissage "*moteur*", le sujet apprend les mouvements permettant de relier les lettres entre elles. Si un sujet, avant d'effectuer la tâche apprend quelque chose sur la disposition spatiale des lettres, on peut alors supposer qu'il en tirera un avantage par rapport à un autre sujet n'ayant pas reçu cet apprentissage perceptif.

L'objectif principal de cette expérience est d'étudier cette dernière hypothèse. Pour cela, les sujets sont répartis en deux groupes; le premier groupe effectue la tâche sans apprentissage perceptif préalable, le second groupe avec apprentissage perceptif préalable. En outre, on fait en sorte que cet apprentissage soit *incident*, et non intentionnel: cet apprentissage

consiste simplement à observer un sujet en train d'effectuer la tâche, sans que celui qui observe soit averti du fait qu'il devra lui-même effectuer la tâche ultérieurement.

Plus précisément, la réalisation de cette expérience visera à répondre aux trois questions principales suivantes:

- (1) est-ce que la répétition de la tâche permet d'obtenir une diminution du temps d'exécution pour les sujets du premier groupe?
- (2) est-ce que l'apprentissage perceptif préalable procure aux sujets du second groupe un gain initial dans le temps d'exécution?
- (3) est-ce que ce gain éventuel tend à diminuer avec la répétition de la tâche?

L'expérience a été réalisée avec des étudiants et on a retenu, à titre de facteur supplémentaire, la nature des études poursuivies: études de psychologie ou études de mathématiques. On cherchera donc encore à répondre à la question complémentaire (en fait un ensemble de questions):

- (4) est-ce que les réponses à chacune des questions précédentes sont identiques ou différentes, suivant la catégorie d'étudiants considérée?

* 1.3 PLAN DU CHAPITRE

2. PRESENTATION ET STRUCTURATION DES DONNEES.....

- 2.1 Description de l'expérience.....
- 2.2 Représentation formalisée de l'expérience.....
- 2.3 Choix du plan d'analyse.....
- 2.4 Premières dérivations.....

3. ANALYSES SPECIFIQUES.....

- 3.1 Planification des analyses spécifiques.....
- 3.2 Analyse de la comparaison e1,e6/c1.....
- 3.3 Analyse de la comparaison c1,c2/e1.....
- 3.4 Analyse de la comparaison c1,c2,e1,e6.....
- 3.5 Analyse de la comparaison n1,n2.....
- 3.6 Analyse de la comparaison e1,e6,n1,n2/c1.....
- 3.7 Analyse de la comparaison c1,c2,n1,n2/e1.....
- 3.8 Analyse de la comparaison c1,c2,e1,e6,n1,n2.....

4 SYNTHÈSE DES RESULTATS.....

J

X

A

V

C

P

T

K

D

H

Y

F

Z

B

L

W

R

M

Q

N

O

E

S

I

G

U

2 PRESENTATION ET STRUCTURATION DES DONNEES

* 2.1 DESCRIPTION DE L'EXPERIENCE

Matériel - Le matériel est constitué par des feuilles sur lesquelles sont inscrites les lettres de A à Z, selon une disposition au hasard (la même pour toutes les feuilles), par des crayons et des chronomètres.

Déroulement de l'expérience - Les étudiants sont répartis au hasard par paires; dans chaque paire, l'un des deux étudiants est choisi au hasard comme sujet de l'expérience et l'autre étudiant est chargé du rôle d'expérimentateur. Les "expérimentateurs" donnent aux "sujets" la consigne suivante, "Je vais vous donner une feuille sur laquelle les lettres de A à Z sont disposées au hasard; votre tâche consiste à rechercher la lettre A, à relier par un trait la lettre A à la lettre B, puis la lettre B à la lettre C, et ainsi de suite jusqu'à la lettre Z. Essayez d'aller le plus vite possible, mais ne commettez aucune erreur; le temps que vous mettrez sera chronométré. Quand vous aurez fini la première feuille, vous en recevrez une autre, identique, et votre tâche sera la même; vous ferez ceci six fois de suite."

En donnant la première feuille, chaque expérimentateur déclenche son chronomètre, puis il surveille attentivement "son sujet", afin de vérifier que celui-ci ne commet pas d'erreur; en cas d'erreur l'expérimentateur avertit le sujet et lui fait corriger son erreur. Dès que le sujet a terminé, l'expérimentateur note le temps d'exécution, puis donne la deuxième feuille au sujet, et ainsi de suite jusqu'à la sixième et dernière feuille.

Quand tous les sujets ont terminé, et sans que les étudiants en aient été avertis auparavant, on inverse les rôles: l'expérimentateur devient lui-même sujet et doit à son tour effectuer la tâche six essais de suite; c'est l'étudiant qui était précédemment le sujet qui note cette fois le temps et surveille l'exécution.

Conditions de passation - Il y a donc deux conditions de passation:

- 1) effectuer la tâche comme sujet d'abord puis comme expérimentateur, c'est-à-dire sans apprentissage perceptif préalable (condition 1);
- 2) effectuer la tâche comme expérimentateur d'abord puis comme sujet, c'est-à-dire avec apprentissage perceptif incident préalable (condition 2).

Sujets - L'expérience a été réalisée, au cours de travaux dirigés, avec des étudiants en troisième année, soit en psychologie, soit en mathématiques, à l'Université de Paris V.

Etudiants en psychologie

Sujets	Essais						Paires	Essais						Sujets
	e1	e2	e3	e4	e5	e6		e1	e2	e3	e4	e5	e6	
s1	129	87	87	64	68	57	p1	81	82	45	49	42	44	s2
s3	105	69	57	53	44	44	p2	87	66	80	59	54	48	s4
s5	183	177	169	78	69	57	p3	63	55	35	31	31	30	s6
s7	83	60	40	36	35	47	p4	89	77	46	45	42	54	s8
s9	60	52	48	39	45	36	p5	50	46	37	29	28	25	s10
s11	106	61	40	46	48	27	p6	84	62	56	40	30	33	s12
s13	127	97	96	88	101	72	p7	65	53	29	55	28	30	s14
s15	82	61	52	54	38	38	p8	83	82	84	82	95	69	s16
s17	86	60	43	44	36	35	p9	31	29	27	26	27	26	s18
s19	71	73	71	78	69	62	p10	67	49	45	49	50	40	s20
s21	116	92	150	67	83	120	p11	73	60	58	47	63	35	s22
s23	85	85	96	63	72	60	p12	63	57	39	49	45	41	s24
s25	96	76	72	49	46	41	p13	53	52	52	57	43	42	s26
s27	91	76	70	64	54	42	p14	73	89	95	69	51	39	s28
s29	84	44	39	34	33	26	p15	58	47	45	41	39	33	s30

condition 1

secondes

condition 2

secondes

Etudiants en mathématiques

Sujets	Essais						Paires	Essais						Sujets
	e1	e2	e3	e4	e5	e6		e1	e2	e3	e4	e5	e6	
s31	86	58	46	33	26	26	p16	52	48	31	32	34	40	s32
s33	76	76	34	55	29	25	p17	37	42	25	23	19	22	s34
s35	88	49	66	37	37	41	p18	34	26	24	23	19	19	s36
s37	102	66	59	48	35	31	p19	64	56	60	55	53	51	s38
s39	75	71	44	36	31	24	p20	76	61	60	41	54	46	s40
s41	63	55	42	35	23	21	p21	62	44	43	44	31	31	s42
s43	77	68	50	56	51	41	p22	59	40	34	35	28	23	s44
s45	105	78	77	110	47	42	p23	72	55	48	27	23	27	s46
s47	77	70	55	53	43	36	p24	139	77	51	48	47	46	s48
s49	84	87	57	65	65	54	p25	44	42	40	28	23	23	s50
s51	136	82	80	51	42	30	p26	71	52	42	40	32	40	s52
s53	144	118	97	78	78	43	p27	85	77	75	85	56	62	s54
s55	123	77	92	60	42	35	p28	107	103	73	67	55	51	s56
s57	110	100	77	67	64	62	p29	65	49	45	48	39	38	s58
s59	123	106	105	113	86	56	p30	67	82	48	46	46	46	s60

condition 1

secondes

condition 2

secondes

Tableau 1 - Données de l'expérience d'apprentissage perceptif incident

Données - Les données recueillies sont présentées dans le tableau 1; elles portent sur 30 paires d'étudiants, soit 15 paires d'étudiants en psychologie et 15 paires d'étudiants en mathématiques.

* 2.2 REPRESENTATION FORMALISEE DE L'EXPERIENCE

2.2.1 Protocole à analyser

Lorsqu'un sujet exécute la tâche correspondant à une feuille, l'observation, c'est-à-dire le temps mis pour relier les lettres, se traduit par une valeur numérique. Le protocole à analyser est donc ici un *protocole numérique* de $360 (30 \times 2 = 60 \text{ sujets et } 6 \text{ feuilles par sujet})$ observations.

2.2.2 Facteurs élémentaires

L'expérience met en jeu les cinq facteurs suivants.

- (1) Le facteur *Sujets* à 60 modalités, que l'on notera S ou S_{60} :
 $S_{60} = \{s_1, s_2, \dots, s_{60}\}$

- (2) Le facteur *Paires (de sujets)* à 30 modalités, que l'on notera P ou P_{30} :
 $P_{30} = \{p_1, p_2, \dots, p_{30}\}$

- (3) Le facteur *Nature des études* à 2 modalités, que l'on notera N ou N_2 :
 $N_2 = \{n_1, n_2\}$

- (4) Le facteur *Conditions de passation* à 2 modalités, que l'on notera C ou C_2 :
 $C_2 = \{c_1, c_2\}$

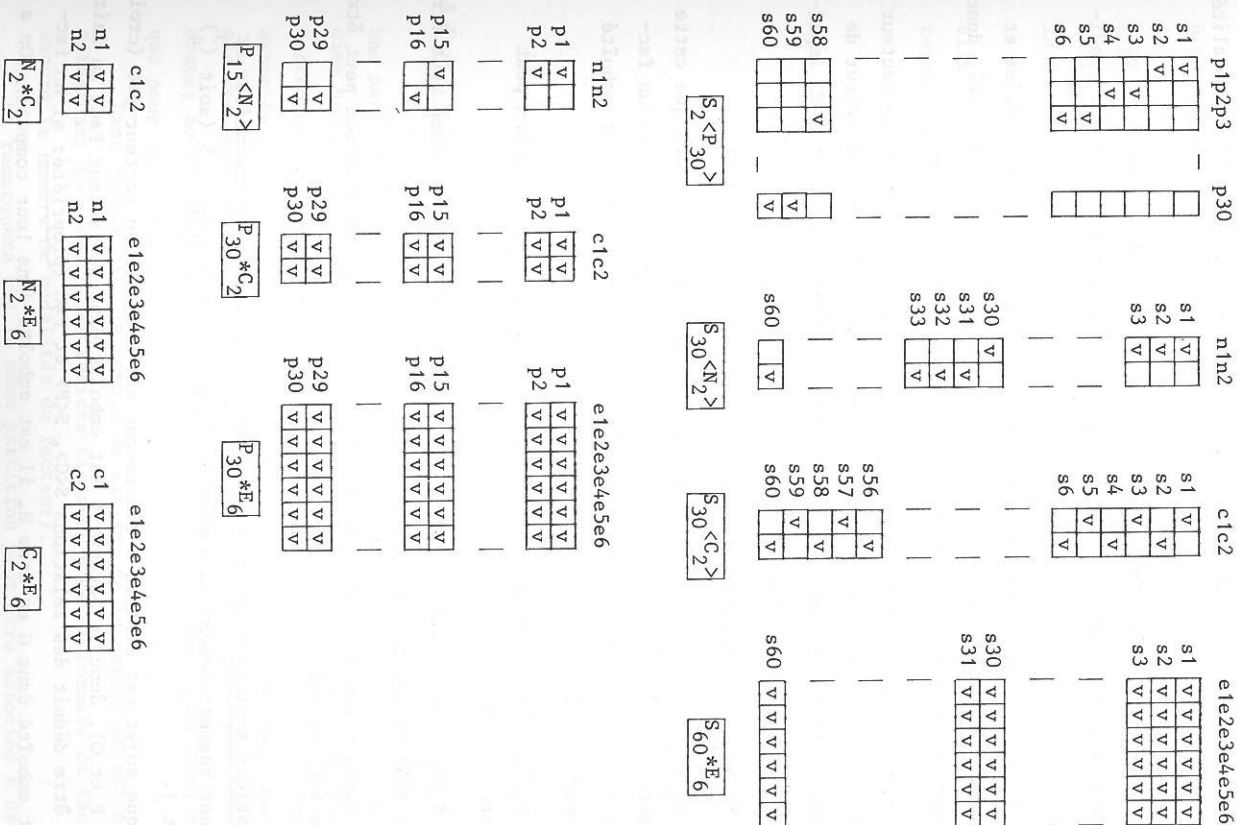
- (5) Le facteur *Essais* à 6 modalités, que l'on notera E ou E_6 :
 $E_6 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

2.2.3 Relations entre les facteurs

Relations binaires (figurées dans la figure 1) - Les facteurs composés binaires sont au nombre de 10 (soit $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$).

- (1) $S_2 < P_{30} >$ - Chaque sujet est affecté à exactement une paire, donc le facteur S est *emboîté* dans le facteur P; l'*emboîtement* est *équilibré*, parce que l'on a le même nombre de sujets à l'intérieur de chaque paire

Figure 1 - Figuration des relations binaires entre les facteurs



(deux). Cet emboîtement sera noté $S_2 \langle P_{30} \rangle$.

(2) $S_{30} \langle N_2 \rangle$ - De même le facteur S est emboîté dans le facteur N et l'emboîtement est équilibré (il y a 30 sujets à l'intérieur de chaque modalité de N).

(3) $S_{30} \langle C_2 \rangle$ - De même le facteur S est emboîté dans le facteur C et l'emboîtement est équilibré (il y a 30 sujets à l'intérieur de chaque condition).

(4) $S_{60} * E_6$ - Chaque sujet effectue 6 essais; ainsi, à chaque sujet et à chaque essai correspond au moins une observation (ici exactement une), donc les facteurs S et E sont croisés. Leur croisement sera noté $S_{60} * E_6$.

(5) $P_{15} \langle N_2 \rangle$ - Le facteur P (de même que S) est emboîté dans le facteur N et l'emboîtement est équilibré (il y a 15 paires de sujets à l'intérieur de chaque modalité de N). On remarquera que les emboîtements $S \langle P \rangle$ et $P \langle N \rangle$ impliquent l'emboîtement $S \langle N \rangle$ (transitivité de l'emboîtement).

(6) $P_{30} * C_2$ - Les facteurs P et C sont croisés.

(7) $P_{30} * E_6$ - Les facteurs P et E sont croisés. On remarquera que cette relation peut être déduite des relations $S \langle P \rangle$ et $S * E$ (propriété: si un facteur F est croisé avec un facteur G, tout facteur dans lequel F est emboîté est également croisé avec G).

(8) $N_2 * C_2$ - Les facteurs N et C sont croisés et cette relation peut être déduite de $P \langle N \rangle$ et $P * C$.

(9) $N_2 * E_6$ - Les facteurs N et E sont croisés et cette relation peut être déduite de $S \langle N \rangle$ et $S * E$ (ou de $P \langle N \rangle$ et $P * E$).

(10) $C_2 * E_6$ - Les facteurs C et E sont croisés et cette relation peut être déduite de $S \langle C \rangle$ et $S * E$.

Relations k-aires - Les facteurs composés ternaires, quaternaires et 5-aires sont respectivement au nombre de 10 (soit $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!}$), 5 (soit $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!1!}$) et 1.

Chaque sujet est affecté à exactement une modalité du facteur $P * C$ (croisement de P et C), donc le facteur S est emboîté dans le facteur $P * C$. En fait ceci peut être déduit des relations $S \langle C \rangle$, $S \langle P \rangle$ et $P * C$ (propriété: si un facteur F est emboîté dans G et dans H, il est emboîté dans leur composé). On a un seul sujet à l'intérieur de chaque modalité du facteur $P * C$, donc S est en relation de confusion avec $P * C$ (ce qu'on peut noter $S \sim P * C$). Le facteur

ternaire, composé de S, P et C, sera noté $S_1 \langle P_{30} * C_2 \rangle$. Et, puisque P est emboîté dans N, on déduit encore le facteur quaternaire $S_1 \langle P_{15} \langle N_2 \rangle * C_2 \rangle$.

A chaque sujet (à l'intérieur de chaque paire et chaque condition) et à chaque essai correspond au moins une observation (ici exactement une), donc les facteurs $S \langle P * C \rangle$ et E sont croisés. En fait ceci peut être déduit des relations $S \langle P * C \rangle$ et $S * E$ (il s'agit d'une propriété générale: $S \sim S \langle \rangle$). Le facteur quaternaire correspondant sera noté $S_1 \langle P_{30} * C_2 * E_6 \rangle$ et on en déduit finalement le facteur 5-aire $S_1 \langle P_{15} \langle N_2 \rangle * C_2 * E_6 \rangle$.

Bien entendu la relation 5-aire $S \langle P \langle N \rangle * C \rangle * E$ entraîne toutes les autres; elle permet en particulier d'établir la liste des facteurs ternaires et quaternaires:

facteurs ternaires	facteurs quaternaires
$S_2 \langle P_{15} \langle N_2 \rangle \rangle$	$S_1 \langle P_{15} \langle N_2 \rangle * C_2 \rangle$
$S_1 \langle P_{30} * C_2 \rangle$	$S_2 \langle P_{15} \langle N_2 \rangle * E_6 \rangle$
$S_2 \langle P_{30} * E_6 \rangle$	$S_1 \langle P_{30} * C_2 * E_6 \rangle$
$S_{15} \langle N_2 * C_2 \rangle$	$S_{15} \langle N_2 * C_2 * E_6 \rangle$
$S_{30} \langle N_2 * E_6 \rangle$	$P_{15} \langle N_2 * C_2 * E_6 \rangle$
$S_{30} \langle C_2 * E_6 \rangle$	
$P_{15} \langle N_2 * C_2 \rangle$	
$P_{15} \langle N_2 * E_6 \rangle$	
$P_{30} * C_2 * E_6$	
$N_2 * C_2 * E_6$	

2.2.4 Partitions des observations et plans du protocole

A chacun des facteurs précédents, élémentaire ou composé, correspond une Partition des observations. Ainsi, par exemple, au facteur S_{60} est associée une partition des observations en 60 classes, chacune de ces classes contenant les 6 observations relatives à un sujet donné; au facteur $C_2 * E_6$ est associée une partition des observations en 12 (2x6) classes, chacune de ces classes contenant les observations relatives à une condition et à un essai donné; au facteur $S_1 \langle P_{15} \langle N_2 \rangle * C_2 \rangle$ est associée la même partition en 60 classes que pour le facteur S_1 ; etc.

Dans chaque cas, le nombre de classes de la partition est obtenu en effectuant le produit des indices figurant dans la formule du facteur (c'est encore le nombre de modalités du facteur).

On remarquera que la même partition peut être associée à des facteurs différents; c'est le cas, on l'a vu, pour S et $S \langle P \langle N \rangle * C \rangle$ (entre autres), auxquels est associée la même partition en 60 classes. Mais, bien entendu, deux

partitions ayant le même nombre de classes peuvent parfaitement être distinctes: c'est par exemple le cas des partitions associées aux facteurs $N_2 * E_6$ et $C_2 * E_6$.

La partition la plus fine des observations est celle qui ne contient qu'une seule observation par classe; elle a ici 360 classes et est associée aux facteurs suivants: $S_{60} * E_6$, $S_{2 < P_{30} > * E_6}$, $S_{30 < N_2 > * E_6}$, $S_{30 < C_2 > * E_6}$, $P_{30} * C_2 * E_6$, $S_{2 < P_{15} > * E_6}$, $S_{1 < P_{30} > * C_2 > * E_6}$, $S_{15 < N_2 * C_2 > * E_6}$, $P_{15 < N_2 * C_2 > * E_6}$, $S_{1 < P_{15} > * C_2 > * E_6}$. Ces dix facteurs sont donc des plans du protocole à analyser (et ce sont les seuls); les plans $S_{60} * E_6$ et $P_{30} * C_2 * E_6$ sont complets, les huit autres plans sont seulement quasi-complets.

* 2.3 CHOIX DU PLAN D'ANALYSE

On visera à retenir un plan d'analyse qui soit le plus riche possible (vis-à-vis des facteurs élémentaires), minimal et quasi-complet. Les dix plans précédents sont quasi-complets, mais on éliminera bien entendu les plans qui ne contiennent pas les facteurs Conditions et Nature des études, c'est-à-dire $S * E$, $S < P > * E$, $S < N > * E$, $S < C > * E$, $P * C * E$, $S < R < N > * E$, $S < P * C > * E$. Il reste donc trois plans que l'on notera, en soulignant les lettres S et P qui désignent des facteurs de groupe (par opposition aux facteurs systématiques N, C et E): $S_{1 < P_{15} > * N_2 > * C_2 > * E_6}$, $P_{15 < N_2 > * C_2 > * E_6}$ et $S_{15 < N_2 * C_2 > * E_6}$.

Le premier de ces plans n'est pas minimal, le facteur élémentaire S étant en relation de confusion avec le composé P * C de deux autres facteurs élémentaires (on dira que S est *superflu* pour l'analyse de ce plan).

Quant au choix entre les deux plans restants, il ne fait pas intervenir les facteurs N et E, donc on peut le ramener au problème de la réduction du facteur $S_{1 < P * C >}$ (pour lequel S est *superflu*), c'est-à-dire au choix entre $P * C$ et $S < C >$. Un principe général de réduction conduit ici à privilégier la réduction en $P * C$; en effet la réduction en $S < C >$ n'est admissible que si l'on introduit des hypothèses sur le modèle d'échantillonnage, alors qu'au contraire la réduction en $P * C$ n'introduit pas d'hypothèse supplémentaire, car l'emboîtement $S_{1 < P * C >}$ implique que la variabilité intra-S est confondue avec celle de P.

La discussion précédente est en fait classique: on compare deux conditions avec deux fois k sujets groupés en k paires. Adopter le plan $P_k * C_2$ conduit au traitement de deux groupes appariés, alors qu'adopter le plan $S_k < C_2 >$ conduirait à traiter les données comme si on ne tenait pas compte de l'appariement (plan des groupes séparés ou indépendants); or ce dernier

plan est en général non approprié, puisque, au niveau du modèle d'échantillonnage, il exige des hypothèses supplémentaires, notamment celle d'une corrélation nulle entre les deux variables associées aux deux conditions. Ainsi ici les sujets de la condition c2 ont eu un apprentissage perceptif différent, suivant par exemple que le sujet qu'ils ont observé a été "lent" ou "rapide"; il ne serait donc pas raisonnable de supposer a priori l'absence de corrélation entre les deux conditions.

Nous choisissons donc ici le plan d'analyse $P_{15 < N_2 > * C_2 * E_6}$, qui appartient au type $\underline{A} < G > * T$, avec $\underline{A} = P$, $G = N_2$ et $T = C_2 * E_6$.

* 2.4 PREMIERES DERIVATIONS

Une fois effectué le choix du plan d'analyse, on peut effectuer un certain nombre de dérivations qui ne dépendent que de la structure du plan retenu (et pas des questions posées) et ont donc un caractère de routine.

2.4.1 Sous-protocoles

A chaque sous-ensemble d'un facteur, élémentaire ou composé, c'est-à-dire à chaque *facteur-partiel*, correspond un *sous-protocole* (ou *protocole-partiel*) obtenu par restriction du support; ce sous-protocole peut être désigné par une formule obtenue en remplaçant dans la formule du plan le facteur en question par son facteur-partiel. On aura par exemple les sous-protocoles suivants.

- Le sous-protocole des observations relatives aux étudiants en psychologie:

$$P_{15 \{n1\}} > * C_2 * E_6 \quad \text{noté simplement } P_{15 \{n1\}} > * C_2 * E_6$$

- Le sous-protocole des observations relatives à la condition c1:

$$P_{15 \{N_2\}} > * \{c1\} * E_6 \quad \text{noté simplement } P_{15 \{N_2\}} > * c1 * E_6$$

$$\text{ou encore } P_{15 \{N_2\}} > * E_6 / c1$$

- Le sous-protocole des observations relatives aux trois premiers essais:

$$P_{15 \{N_2\}} > * \{e1, e2, e3\} \quad \text{noté simplement } P_{15 \{N_2\}} > * C_2 * e1 \ e2 \ e3$$

- Le sous-protocole des observations relatives à la condition c1 et à l'essai e1:

$P_{15} \langle N_2 \rangle * \{c1\} * \{e1\}$ noté simplement $P_{15} \langle N_2 \rangle * c1e1$
ou encore $P_{15} \langle N_2 \rangle / c1e1$

- Et, tout particulièrement, les 24 sous-protocoles relatifs à chacune des modalités du facteur systématique $N_2 * C_2 * E_6$:

$P_{15} \langle n1 \rangle * \{c1\} * \{e1\}$ noté simplement $P_{15} \langle n1 \rangle * c1e1$ ou encore $P_{15} \langle n1 \rangle / c1e1$
 $P_{15} \langle n1 \rangle * \{c1\} * \{e2\}$ noté simplement $P_{15} \langle n1 \rangle * c1e2$ ou encore $P_{15} \langle n1 \rangle / c1e2$
 ...
 $P_{15} \langle n1 \rangle * \{c2\} * \{e6\}$ noté simplement $P_{15} \langle n1 \rangle * c2e6$ ou encore $P_{15} \langle n1 \rangle / c2e6$
 $P_{15} \langle n2 \rangle * \{c1\} * \{e1\}$ noté simplement $P_{15} \langle n2 \rangle * c1e1$ ou encore $P_{15} \langle n2 \rangle / c1e1$
 ...
 $P_{15} \langle n2 \rangle * \{c2\} * \{e6\}$ noté simplement $P_{15} \langle n2 \rangle * c2e6$ ou encore $P_{15} \langle n2 \rangle / c2e6$

On remarquera que dans les écritures du type $P_{15} \langle n \rangle * c e$ (où n, c et e sont des modalités de N, C et E) on conserve le symbole "*" pour séparer les termes qui, par rapport à la structure $A \langle G \rangle * T$, proviennent respectivement de G et de T. Les modalités c et e qui proviennent de deux facteurs partiels de T sont simplement juxtaposées. Enfin les modalités d'un même facteur sont séparées par des blancs: on écrit e1 e2 e3 (pour {e1, e2, e3}) ou encore c1e1 c2e1 (pour {c1e1, c2e1}). Aux symboles "*" et "<>" qui permettent d'écrire les formules de plans quasi-complets, on a donc ajouté, pour désigner les sous-protocoles, les symboles " " et "/".

2.4.2 Protocoles dérivés par moyennage

Les 24 moyennes obtenues pour chacun des 24 sous-protocoles du type $P_{15} \langle n \rangle / c e$ constituent les statistiques de base pour les comparaisons entre les différentes modalités du facteur systématique $N_2 * C_2 * E_6$. On définit ainsi le *protocole numérique dérivé par moyennage* sur le facteur de groupe P qu'on notera:

$$N_2 * C_2 * E_6 / P \quad (\text{notation pleine})$$

ou

$$N_2 * C_2 * E_6 \quad (\text{notation par défaut})$$

et qui est caractérisé par l'application:

$$\begin{array}{l} N_2 * C_2 * E_6 \rightarrow \mathbb{R} \\ n * c e \mapsto x \quad n * c e \text{ moyenne des temps calculée sur l'ensemble} \end{array}$$

des paires, à l'intérieur de la modalité n, pour la condition c et l'essai e.

Ce protocole dérivé est présenté dans le tableau 2 et la figure 2.

A partir de ce protocole, on peut dériver de nouveaux protocoles par moyennage:

- sur le facteur Nature des études

$$C_2 * E_6 / N_2 \quad \text{ou} \quad C_2 * E_6 \quad (\text{par défaut})$$

- sur le facteur Conditions

$$N_2 * E_6 / C_2 \quad \text{ou} \quad N_2 * E_6$$

- sur le facteur Essais

$$N_2 * C_2 / E_6 \quad \text{ou} \quad N_2 * C_2$$

- sur deux de ces facteurs simultanément

$$E_6 / N_2 * C_2 \quad \text{ou} \quad E_6$$

$$C_2 / N_2 * E_6 \quad \text{ou} \quad C_2$$

Ces différents protocoles sont présentés dans le tableau 3.

On peut également dériver des protocoles par moyennage, non plus sur la totalité des modalités d'un facteur, mais simplement sur une partie de ces modalités, par exemple par moyennage:

- sur les paires de sujets appartenant à la modalité n1

$$C_2 * E_6 / P \langle n1 \rangle \quad \text{ou} \quad C_2 * E_6 / n1 \quad (\text{ici "/" ne peut être omis})$$

- sur les paires de sujets pour la condition c1 et les essais e1 et e2

$$N_2 / c1e1 \quad c1e2 \quad \text{ou} \quad N_2 * e1 \quad e2 / c1$$

etc.

On remarquera que le protocole (dérivé par moyennage) $C_2 * E_6 / n1$ est un sous-protocole du protocole (lui-même dérivé par moyennage) $N_2 * C_2 * E_6$, ce qui justifie l'utilisation du même symbole "/" pour désigner soit un sous-protocole soit un sous-protocole dérivé par moyennage.

On peut encore, à partir d'un protocole donné (dérivé ou non), dériver des protocoles par moyennage sur plusieurs parties différentes de son support. Par exemple, à partir du protocole E_6 (qui a 6 observations), on peut calculer les trois moyennes relatives respectivement aux essais e1 et e2, aux essais e3 et e4, et aux essais e5 et e6; le nouveau protocole dérivé (de 3 observations) ainsi défini pourra être noté en introduisant un nouveau

Tableau 2 - Protocole dérivé par moyennage $N_2 * C_2 * E_6$

	$\frac{c1e1}{n1}$	$\frac{c1e2}{n1}$	$\frac{c1e3}{n1}$	$\frac{c1e4}{n1}$	$\frac{c1e5}{n1}$	$\frac{c1e6}{n1}$
	100.27	78.00	75.33	57.13	56.07	50.93
	$\frac{c2e1}{n2}$	$\frac{c2e2}{n2}$	$\frac{c2e3}{n2}$	$\frac{c2e4}{n2}$	$\frac{c2e5}{n2}$	$\frac{c2e6}{n2}$
	97.93	77.40	65.40	59.80	46.60	37.80
	68.00	60.40	51.53	48.53	44.53	39.27
	68.93	56.93	46.60	42.80	37.27	36.67
						secondes

Tableau 3 - Autres protocoles dérivés par moyennage

$\frac{e1}{c1}$	$\frac{e2}{c1}$	$\frac{e3}{c1}$	$\frac{e4}{c1}$	$\frac{e5}{c1}$	$\frac{e6}{c1}$
99.10	77.70	70.37	58.47	51.33	44.37
$\frac{e1}{c2}$	$\frac{e2}{c2}$	$\frac{e3}{c2}$	$\frac{e4}{c2}$	$\frac{e5}{c2}$	$\frac{e6}{c2}$
68.47	58.67	49.07	45.67	40.90	37.97
					secondes

$\frac{e1}{n1}$	$\frac{e2}{n1}$	$\frac{e3}{n1}$	$\frac{e4}{n1}$	$\frac{e5}{n1}$	$\frac{e6}{n1}$
84.13	69.20	63.43	52.83	50.30	45.10
$\frac{e1}{n2}$	$\frac{e2}{n2}$	$\frac{e3}{n2}$	$\frac{e4}{n2}$	$\frac{e5}{n2}$	$\frac{e6}{n2}$
83.43	67.17	56.00	51.30	41.93	37.23
					secondes

$\frac{c1}{n1}$	$\frac{c2}{n1}$
69.62	52.04
$\frac{c1}{n2}$	$\frac{c2}{n2}$
64.16	48.20
	secondes

$\frac{e1}{E6}$	$\frac{e2}{E6}$	$\frac{e3}{E6}$	$\frac{e4}{E6}$	$\frac{e5}{E6}$	$\frac{e6}{E6}$
83.78	68.18	59.72	52.07	46.12	41.17
					secondes

$\frac{c1}{C2}$	$\frac{c2}{C2}$
66.89	50.12
	secondes

$\frac{n1}{N2}$	$\frac{n2}{N2}$
60.83	56.18
	secondes

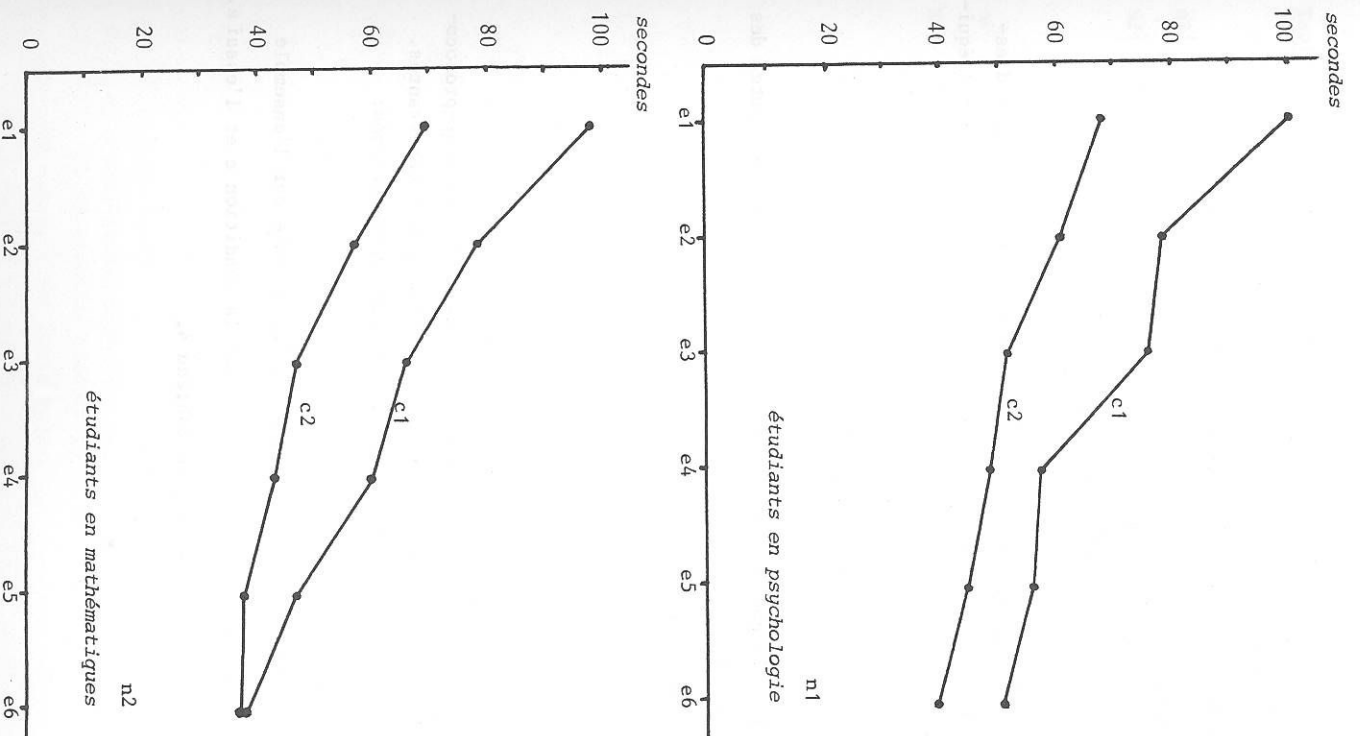


Figure 2 - Figuration du protocole dérivé par moyennage $N_2 * C_2 * E_6$

symbole ", " :

e1 e2, e3 e4, e5 e6

On aura comme autres exemples de protocoles dérivés de ce type :

e1 e2 e3, e4 e5 e6

e1 e2 e3, e4 e5 e6/c1

$N_2 * e1$ e2 e3, e4 e5 e6/c2

etc.

Enfin, on notera qu'il existe, dans le langage que nous venons d'esquisser un grand nombre d'équivalences. On remarquera en particulier l'équivalence des écritures :

"N₂ " "n1 n2" "n1, n2"

"C₂/e1" c1 c2/e1" "c1, c2/e1"

etc.

Mais on vérifiera également que les écritures ci-après désignent toutes des protocoles différents :

"e1, e2, e3, e4, e5, e6"

"e1 e2 e3, e4 e5 e6"

"e1 e2, e3 e4, e5 e6"

etc.

2.4.3 Protocole dérivé des écarts-types-corrigés

Les 24 écarts-types-corrigés obtenus pour chacun des 24 sous-protocoles du type P<n>/ce constituent également des statistiques intéressantes.

On peut ainsi définir le protocole dérivé des écarts-types-corrigés :

$$N_2 * C_2 * E_6 \rightarrow R \text{ (ETY)}$$

nkce \rightarrow s nkce écart-type-corrigé calculé sur l'ensemble

des paires, à l'intérieur de la modalité n, pour la condition c et l'essai e.
Ce protocole est présenté dans le tableau 4.

* * *

Tableau 4 - Protocole dérivé des écarts-types-corrigés $N_2 * C_2 * E_6$ (ETY)

	c1e1	c1e2	c1e3	c1e4	c1e5	c1e6
n1	30.00	31.24	39.54	16.37	20.03	23.26
n2	24.75	19.07	21.68	24.61	18.93	12.36
	secondes					
	c2e1	c2e2	c2e3	c2e4	c2e5	c2e6
n1	15.99	16.32	20.22	14.89	17.61	11.52
n2	26.75	20.00	15.46	16.95	13.64	12.84
	secondes					

3 ANALYSES SPECIFIQUES

*3.1 PLANIFICATION DES ANALYSES SPECIFIQUES

Revenant maintenant aux objectifs de l'expérience, il va s'agir d'établir une liste des comparaisons qui donneront lieu aux analyses spécifiques permettant de rechercher des réponses directes aux questions qui ont été posées.

(1) Pour la première question "est-ce que la répétition de la tâche permet d'obtenir une diminution du temps d'exécution pour les sujets de la première condition?", différentes comparaisons pourraient être envisagées. Pour une plus grande simplicité technique de l'exposé, nous nous limiterons dans ce chapitre à comparer le premier essai au sixième essai pour la première condition (d'autres possibilités seront considérées et discutées ultérieurement); cette comparaison, à un degré de liberté, sera notée $e1, e6/c1$.

(2) Pour la deuxième question "est-ce que l'apprentissage perceptif préalable procure aux sujets de la deuxième condition un gain initial dans le temps d'exécution?", il s'agit de comparer la condition 1 à la condition 2, en se limitant au premier essai; cette comparaison, à un degré de liberté, sera notée $c1, c2/e1$.

(3) Pour la troisième question "est-ce que ce gain éventuel tend à diminuer avec la répétition de la tâche?", il s'agit de comparer le "gain initial" (au premier essai) au "gain final" (au sixième essai) (compte tenu du choix effectué pour la première question consistant à se limiter aux essais 1 et 6); cette comparaison est une comparaison d'interaction, à un degré de liberté, qui sera notée $c1, c2, e1, e6$ (interaction entre les comparaisons $c1, c2$ et $e1, e6$).

(4) Enfin, pour les questions complémentaires "est-ce que les réponses à chacune des trois questions précédentes sont identiques ou sont différentes, suivant la catégorie d'étudiants considérée?", nous considérerons d'une part la comparaison des deux modalités $n1$ et $n2$, qui sera notée $n1, n2$, et d'autre part les interactions entre les trois comparaisons définies précédemment et la comparaison $n1, n2$, c'est-à-dire les comparaisons notées: $e1, e6, n1, n2/c1$; $c1, c2, n1, n2/e1$; $c1, c2, e1, e6, n1, n2$ (toutes ces comparaisons sont à un degré de liberté).

La planification des analyses spécifiques correspondant aux questions de l'expérience nous conduira donc ici à analyser sept comparaisons, chacune à un degré de liberté:

$e1, e6/c1$
$c1, c2/e1$
$c1, c2, e1, e6$
$n1, n2$
$e1, e6, n1, n2/c1$
$c1, c2, n1, n2/e1$
$c1, c2, e1, e6, n1, n2$

On remarquera que le langage des comparaisons découle directement du langage des protocoles dérivés: la même formule désignera, suivant le contexte, un protocole dérivé et la comparaison globale sur le support de ce protocole. Ainsi, parmi les comparaisons précédentes, $e1, e6/c1$, $c1, c2/e1$ et $n1, n2$ sont des comparaisons globales sur les supports désignés par ces mêmes formules. On pourrait encore remplacer dans les formules de comparaisons précédentes $e1, e6$ par $e1, e6$; $c1, c2$ par $c1, c2$ ou par C_2 ; $n1, n2$ par $n1, n2$ ou par N_2 .

Pour désigner les comparaisons qui ne sont pas du type comparaison globale, on introduira de nouveaux symboles propres au langage des comparaisons; " " pour désigner l'interaction en constitue un exemple.

*3.2 ANALYSE DE LA COMPARAISON $e1, e6/c1$

Par rapport à la structure $\underline{A} \langle G \rangle * T$, la comparaison $e1, e6/c1$ est du type $W/G1$, comparaison W sur T conditionnelle à une partie $G1$ de G ; on se trouve ici dans le cas particulier $G1 = G$, mais l'exemple a néanmoins valeur générale.

3.2.1 Caractérisation de l'effet observé

Il s'agit de comparer le temps moyen d'exécution au premier essai au temps moyen d'exécution au sixième essai pour la condition $c1$; respectivement ces deux temps observés (qui sont les deux moyennes du protocole dérivé $e1, e6/c1$) sont respectivement 99.10 et 44.37 secondes. On peut choisir comme effet observé associé à la comparaison $e1, e6/c1$ la différence entre ces deux moyennes, soit $99.10 - 44.37 = +54.73$ secondes: on observe une diminution du temps moyen d'exécution de près de 55 secondes du premier au sixième essai. On peut également, de manière assez naturelle, rapporter cette diminution au nombre d'essais qui ont permis de l'obtenir, c'est-à-dire ici cinq essais: $+54.73/5 = +10.95$ secondes traduit la diminution du temps d'exécution "en moyenne" par essai; c'est cette valeur que nous retiendrons ici pour caractériser l'effet observé associé à la comparaison $e1, e6/c1$ et nous définirons en conséquence:

$$d = (99.10 - 44.37)/5 = +10.95 \text{ secondes}$$

Formellement d est l'effet observé associé au contraste entre moyennes sur le support e1,e6/c1 de coefficients +1/5 et -1/5: $d = +99.10/5 - 44.37/5$.

3.2.2 Recherche d'un protocole dérivé pertinent

Ici l'effet observé peut être défini pour chaque paire de sujets, en fait pour chaque sujet de la condition c1 puisque l'on se limite à cette condition: par exemple, pour la première paire de sujets (à l'intérieur de n1), on observe au premier essai un temps d'exécution de 129 secondes et au sixième essai un temps d'exécution de 57 secondes; on définira donc l'effet observé pour ce sujet comme $d^p1 = (129-57)/5 = +14.40$ secondes.

Formellement le protocole des effets observés pour chaque sujet - on dira encore le protocole des effets individuels - est dérivé par contraste du sous-protocole $P_{KN_2} * e1, e6/c1$, comme l'indique le tableau 5; et ce protocole constitue les données de base pour l'analyse spécifique de la comparaison e1,e6/c1, ou plus exactement pour l'analyse spécifique du contraste qui a été choisi pour la représenter. On remarquera que ce protocole ne peut pas être désigné seulement par une formule, mais qu'il est nécessaire, pour le désigner, d'indiquer le protocole dont il est dérivé (ici $P_{KN_2} * e1, e6/c1$) et de spécifier le contraste qui définit la dérivation (ici le contraste de coefficients +1/5 et -1/5).

3.2.3 Analyse descriptive

Statistiques pour l'analyse de la comparaison e1,e6/c1 - Pour résumer le protocole numérique précédent (cf tableau 5), on considérera assez naturellement les statistiques suivantes.

• D'abord, à l'intérieur de chacune des modalités n1 et n2, on calcule la moyenne et l'écart-type-corrigé des 15 observations correspondantes; on définit ainsi:

$$d^{n1} = +9.87 \text{ (effet moyen pour la modalité n1)}$$

$$s_{n1} = 6.20$$

respectivement moyenne et écart-type-corrigé des effets individuels pour la modalité n1 (étudiants en psychologie);

$$d^{n2} = +12.03 \text{ (effet moyen pour la modalité n2)}$$

$$s_{n2} = 4.60$$

respectivement moyenne et écart-type-corrigé des effets individuels pour la modalité n2 (étudiants en mathématiques).

Tableau 5 - Protocole dérivé pertinent pour la comparaison e1,e6/c1

	c1e1		c1e6		effet observé
n1	s1<p1>	129	57	+14.4	
	s3<p2>	105	44	+12.2	
	s5<p3>	183	57	+25.2	
	s7<p4>	83	47	+7.2	
	s9<p5>	60	36	+4.8	
	s11<p6>	106	27	+15.8	
	s13<p7>	127	72	+11.0	
	s15<p8>	82	38	+8.8	
	s17<p9>	86	35	+10.2	
	s19<p10>	71	62	+1.8	
	s21<p11>	116	120	-0.8	
	s23<p12>	85	60	+5.0	
	s25<p13>	96	41	+11.0	
	s27<p14>	91	42	+9.8	
	s29<p15>	84	26	+11.6	
					$d^{n1} = +9.87$
					$s_{n1} = 6.20$
n2	s31<p16>	86	26	+12.0	
	s33<p17>	76	25	+10.2	
	s35<p18>	88	41	+9.4	
	s37<p19>	102	31	+14.2	
	s39<p20>	75	24	+10.2	
	s41<p21>	63	21	+8.4	
	s43<p22>	77	41	+7.2	
	s45<p23>	105	42	+12.6	
	s47<p24>	77	36	+8.2	
	s49<p25>	84	54	+6.0	
	s51<p26>	136	30	+21.2	
	s53<p27>	144	43	+20.2	
	s55<p28>	123	35	+17.6	
	s57<p29>	110	62	+9.6	
	s59<p30>	123	56	+13.4	
					$d^{n2} = +12.03$
					$s_{n2} = 4.60$

secondes

• Ensuite, puisque l'on considère l'effet de manière non conditionnelle par rapport au facteur Nature des études, on définit:

- la moyenne des effets moyens pour chaque modalité n1 et n2

$$\bar{d} = \frac{+9.87+12.03}{2} = +10.95$$

qui n'est autre que l'effet du contraste défini en 3.2.1;

- la moyenne quadratique des écarts-types-corrigés pour chaque modalité n1 et n2

$$s = \sqrt{\frac{6.20^2+4.60^2}{2}} = 5.46 \text{ secondes}$$

Lien avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance - On peut maintenant se demander quel est le lien entre les statistiques \bar{d} et s , que l'on est naturellement amené à considérer, et les statistiques usuelles de l'analyse de la variance (carrés-moyens); on a ici:

$$cm_{e1,e6/c1} = 44936.0667$$

$$cm_{p(N).e1,e6/c1} = 372.4476$$

que l'on peut calculer à partir des formules données dans la partie théorique (nous n'insisterons pas sur ce point dans cet ouvrage) ou encore obtenir par programme.

En calculant \bar{d} (+10.9467) et s (5.4586) avec la précision nécessaire, on peut en déduire empiriquement (compte tenu des arrondis) les relations suivantes:

$$cm_{e1,e6/c1} = 375\bar{d}^2$$

$$cm_{p(N).e1,e6/c1} = \frac{25}{2}s^2$$

Les coefficients 375 et 25/2 qui apparaissent ici peuvent être justifiés d'une manière formelle par les égalités:

$$\frac{1}{375} = \frac{(+1/5)^2+(-1/5)^2}{15+15}$$

$$\frac{2}{25} = (+1/5)^2+(-1/5)^2$$

où, d'une part +1/5 et -1/5 sont les coefficients du contraste analysé, et d'autre part 15 est le nombre de paires de sujets à l'intérieur de chacune des modalités n1 et n2.

Remarques - Les relations précédentes permettent d'illustrer les deux points suivants.

D'une part, les statistiques usuelles de l'analyse de la variance classique - carrés moyens ou encore sommes-des-carrés - sont techniquement liées aux statistiques pertinentes - \bar{d} et s - que nous avons été amené à considérer par la démarche naturelle qui est celle de l'Analyse Bayésienne des Comparaisons.

Mais, d'autre part, ces statistiques usuelles de l'analyse de la variance ne peuvent en aucune manière servir directement de critère pour juger de la grandeur des effets observés, puisque leur rapport aux statistiques clairement interprétables pour un tel jugement (\bar{d} et s) dépend des effectifs (du nombre d'observations), et également ici du contraste choisi pour représenter la comparaison.

En pratique, le lien technique entre les statistiques \bar{d} et s d'une part et les statistiques carrés-moyens (ou sommes-des-carrés) d'autre part pourra cependant être utile, notamment pour l'analyse de gros ensembles de données, puisque l'on pourra recourir aux différents programmes de l'analyse de la variance actuellement répandus. Mais cela supposera évidemment d'être en mesure d'explicitier ce lien, afin d'en déduire les valeurs des statistiques pertinentes; en tout état de cause, on pourra trouver là un procédé utile pour vérifier les calculs effectués.

Résumé descriptif de l'analyse - Rappelons que l'analyse descriptive de la comparaison $e1,e6/c1$ a conduit à définir:

- l'effet (moyen) observé

$$\bar{d} = +10.95 \text{ secondes}$$

- l'écart-type-corrigé (intra-groupe) des effets individuels observés

$$s = 5.46 \text{ secondes}$$

Nous pouvons considérer que les deux valeurs $\bar{d} = +10.95$ et $s = 5.46$ constituent le résumé descriptif de l'analyse spécifique de la comparaison $e1,e6/c1$; ces valeurs nous conduisent à commenter les résultats de la manière suivante.

- L'effet observé moyen est important: 10.95 secondes représentent un gain moyen par essai supérieur à 10% du temps d'exécution initial (le temps moyen observé au premier essai est 99.10 secondes).

- En outre l'effet observé est important pour la plupart des sujets: effectivement, l'effet moyen $\bar{d} = +10.95$ secondes est grand par rapport

à l'écart-type-corrige des effets individuels (le rapport $\frac{d}{s}$ valant +2.01), ce qui résume ici le fait que, sur 30 sujets, 29 ont un effet positif et 28 ont un effet supérieur ou égal à +4.8 secondes.

3.2.4 Analyse inductive

Il s'agit maintenant de chercher à prolonger inductivement les résultats précédents; cette fois le jugement ne portera plus sur les valeurs observées, d et s , mais sur les valeurs théoriques correspondantes, δ (effet théorique) et σ (écart-type théorique). Pour cela on met en oeuvre des procédures *inférentielles*, expressément conçues pour aboutir à un tel jugement.

Si, dans la situation présente, il n'y avait qu'une seule catégorie d'étudiants (disons n_1 pour fixer les idées), on serait manifestement ramené au problème classique de l'inférence sur une moyenne qui, sous le modèle normal, conduit, en ce qui concerne le test de signification, au test de Student usuel. Pour tenir compte de la structure introduite par le facteur N_2 , on étend cette solution, de manière évidente, en posant le modèle équinormal des groupes séparés: à l'intérieur de chaque modalité n , on pose le modèle normal caractérisé par les paramètres δ^n (effet théorique pour la modalité n) et σ ; l'effet δ est bien entendu défini, de manière analogue à d , par la moyenne $\delta = (\delta^{n_1} + \delta^{n_2})/2$.

Test de signification - Le test de signification est la généralisation directe du test de Student usuel pour l'inférence sur une moyenne; on définit la statistique de test:

$$t = \frac{\bar{d}}{s_{obs}} \text{ avec, ici, } b = \frac{1}{15+15} \text{ et } q = 28 \text{ degrés de liberté}$$

pour laquelle on a ici la valeur observée

$$t_{obs} = \frac{+10.95}{5.46} \sqrt{30} = +10.98$$

Le nombre de degrés de liberté est la somme du nombre de degrés de liberté associé à s_{n_1} ($15-1 = 14$) et du nombre de degrés de liberté associé à s_{n_2} ($15-1 = 14$).

On peut vérifier empiriquement que $t_{obs}^2 = F_{obs} = 44936.07/372.45 = 120.65$, qui est le rapport des deux carrés-moyens introduit précédemment; ceci illustre le lien avec le rapport F usuel de l'analyse de la variance:

$$F = \frac{cm_{e1, e6/c1}}{cm_p(N).e1, e6/c1} = t^2 \text{ (avec 1 et 28 degrés de liberté)}$$

Procédures fiducio-bayésiennes - Les procédures fiducio-bayésiennes sont alors obtenues de manière immédiate, en calculant:

$$e^2 = \frac{d^2}{F_{obs}} = \frac{d^2}{t_{obs}^2} = 1.00^2$$

On a alors les distributions fiducio-bayésiennes relatives aux paramètres δ et σ :

$$\begin{aligned} \delta^* &\sim t_{28} (+10.95, 1.00^2) && \text{(de la forme } t_q(d, e^2)) \\ \sigma^* &\sim 5.46\phi_{28}^{-1} && \text{(de la forme } s\phi_q^{-1}) \end{aligned}$$

Quelle information nous apportent ces procédures inférentielles? - En ce qui concerne le test de signification, la valeur observée de la statistique de test est très supérieure aux valeurs correspondant aux seuils de signification usuels, que l'on peut trouver dans les tables des distributions du t de Student ou du F de Fisher-Snedecor; ces tables sont largement répandues et nous n'avons donc pas trouvé utile de les reproduire dans cet ouvrage. On peut traduire le résultat très significatif du test de signification en disant que l'existence d'un effet est bien établie. Ceci n'est évidemment pas synonyme de dire que cet effet est important; en effet un résultat significatif ne signifie pas que l'on a prouvé que l'effet est notable.

En ce qui concerne les distributions fiducio-bayésiennes, le moyen le plus direct d'apprécier l'information qu'elles apportent est sans aucun doute de les figurer en traçant les courbes des densités correspondantes (une manière de procéder est illustrée en annexe de l'ouvrage). Ces courbes sont présentées dans la figure 3.

La distribution fiducio-bayésienne relative à δ est une distribution du t de Student usuelle, à un facteur de centrage (elle est centrée sur d au lieu de 0) et d'échelle (elle a pour indice d'échelle e au lieu de 1) près. Son nombre de degrés de liberté est le nombre de degrés de liberté de la comparaison qui a fourni le dénominateur du rapport F ; plus ce nombre de degrés de liberté est élevé, plus la distribution fiducio-bayésienne se rapproche d'une distribution normale de centre d et d'écart-type e (l'écart-type de la distribution fiducio-bayésienne vaut en fait $\frac{e}{q-2}$).

Ici "presque toute" l'aire de la courbe est située à droite de la valeur zéro; autrement dit on a une probabilité fiducio-bayésienne très faible (en fait, calculée par programme, inférieure à 10^{-9}) que l'effet théorique soit négatif (c'est-à-dire du sens contraire de l'effet observé d). En fait cette probabilité n'est autre que le seuil observé unilatéral (noté $\frac{P}{2}$) du test de signification, soit $P(t_{28} > +10.98) = \frac{P}{2}$ ou encore $P(F_{1,28} > 120.65) = \frac{P}{2}$. Compte tenu de cette remarque, l'énoncé $P(\delta^* > 0) = 1 - \frac{P}{2}$ (ici $1 - 5 \times 10^{-10}$) constitue la traduction fiducio-bayésienne du résultat du test de signification; il fait

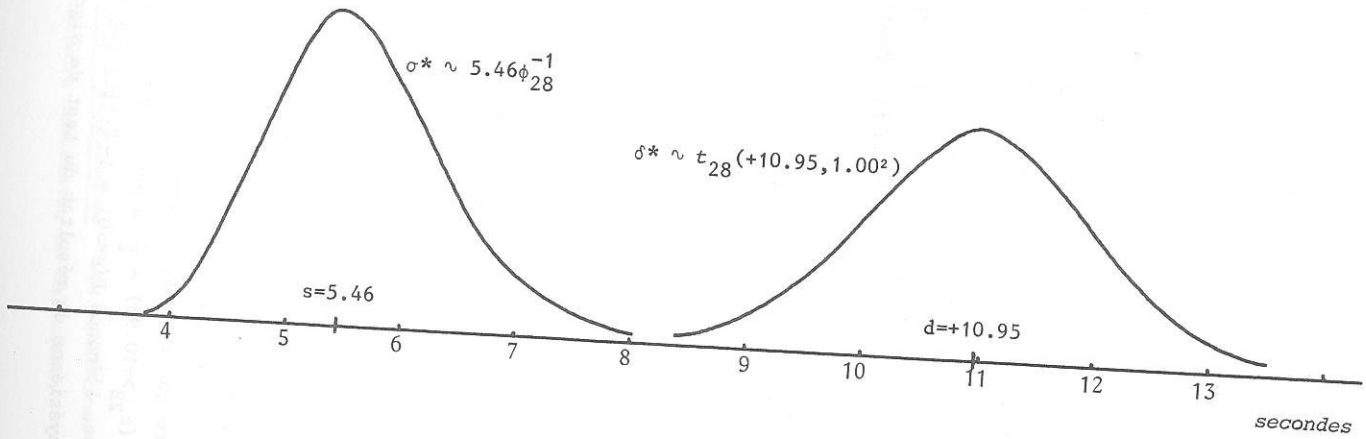


Figure 3 - Distributions fiducio-bayésiennes pour la comparaison e1, e6/c1

immédiatement apparaître la "pauvreté" de l'information apportée par le test de signification par rapport à l'information contenue dans la distribution fiducio-bayésienne. Manifestement on a ici une garantie élevée, non seulement que l'effet δ est positif, mais encore que l'effet δ est important: par exemple, on a la garantie fiducio-bayésienne $\gamma = 0.90$ que δ dépasse +9.6 secondes, ce que l'on écrit:

$$P(\delta^* > +9.6) = 0.90$$

La distribution fiducio-bayésienne relative à σ est une distribution asymétrique, dont la valeur observée s est un indice de tendance centrale: s est compris entre, d'une part le mode, et d'autre part la médiane et la moyenne de la distribution; à titre d'exemple, ici la distribution $5.46\phi_{28}^{-1}$ a pour mode 5.37, pour médiane 5.53 et pour moyenne 5.61.

On peut ici énoncer: "avec la garantie fiducio-bayésienne 0.90 l'écart-type théorique σ est inférieur à 6.6 secondes", ce que l'on écrit

$$P(\sigma^* < 6.6) = 0.90$$

6.6 étant petit comparativement à la limite inférieure obtenue pour l'effet moyen (+9.6), on peut donc conclure que dans la plupart des cas l'effet est important. A titre indicatif, pour une distribution normale de centre +9.6 et d'écart-type 6.6, une proportion 0.90 des valeurs dépassent +1.1 et une proportion 0.80 dépassent +4.

3.2.5 Mise en oeuvre pratique de l'inférence fiducio-bayésienne

Techniquement, l'analyse fiducio-bayésienne est facile à mettre en oeuvre lorsque l'effet porte sur une différence de moyennes (éventuellement, comme ici, à une constante de proportionnalité près), une différence de différences de moyennes, ou plus généralement sur ce que l'on appelle un contraste entre moyennes.

Une fois effectuée l'analyse descriptive, le seul intermédiaire de calcul est le rapport F qui conduit au test de signification approprié à la comparaison analysée. Comme on vient de le voir, il est alors immédiat d'en déduire les distributions fiducio-bayésiennes. Par rapport au test de signification usuel, la seule "difficulté" technique nouvelle est de se familiariser avec l'utilisation de ces distributions: le tracé des courbes et l'obtention des énoncés de probabilité.

(Il y a malheureusement une exception à cette manière de procéder, le cas où l'effet observé serait nul et où il faudrait recourir à une procédure plus complexe pour calculer l'indice d'échelle e : il y a une justice, la pratique ne peut pas ignorer totalement la théorie!).

Dans le cas présent de l'inférence sur l'effet d'un contraste, les distributions en jeu, t de Student, ϕ -inverse (dérivé du χ^2), sont relativement familières et peuvent être aisément programmées, même sur des calculatrices portables. En outre, on peut en établir des tables qui permettent de satisfaire les besoins courants. Des tables qui permettent d'obtenir l'essentiel des résultats présentés dans ce chapitre (tracé des courbes et obtention des limites correspondant à une garantie donnée) sont présentées et commentées en annexe du présent ouvrage.

* 3.3 ANALYSE DE LA COMPARAISON $c_1, c_2/e_1$

La comparaison $c_1, c_2/e_1$ est du même type que la comparaison $e_1, e_6/c_1$ (type W/G_1 avec $G_1 = G$); elle sera donc traitée de la même manière.

3.3.1 Caractérisation de l'effet observé

Il s'agit ici de comparer le temps moyen d'exécution au premier essai dans la condition c_1 au temps moyen d'exécution au premier essai dans la condition c_2 ; descriptivement ces deux temps observés (qui sont les deux moyennes du protocole dérivé $c_1, c_2/e_1$) sont respectivement 99.10 et 68.47 secondes. On caractérisera donc de manière naturelle l'effet observé associé à la comparaison $c_1, c_2/e_1$ par la différence $d = 99.10 - 68.47 = +30.63$ secondes. Formellement d est l'effet observé associé au contraste entre moyennes de coefficients $+1$ et -1 .

3.3.2 Recherche d'un protocole dérivé pertinent

Ici l'effet observé peut être défini pour chaque paire de sujets. Formellement le protocole des effets observés pour chaque paire de sujets est dérivé (par contraste) du sous-protocole $P_{K \times 2} > *c_1, c_2/e_1$, comme l'indique le tableau 6; et ce protocole constitue les données de base pour l'analyse spécifique de la comparaison $c_1, c_2/e_1$, ou plus exactement du contraste qui a été choisi pour la représenter.

3.3.3 Analyse descriptive

Pour résumer le protocole numérique précédent, on considérera les statistiques suivantes:

- la moyenne des effets moyens pour chaque modalité n_1 et n_2

$$d = \frac{+32.27 + 29.00}{2} = +30.63 \text{ secondes}$$

qui n'est autre que l'effet du contraste défini en 3.3.1

Tableau 6 - Protocole dérivé pertinent pour la comparaison $c_1, c_2/e_1$

	n_1	c_1/e_1	c_2/e_1	effet observé
	p1	129	81	+ 48
	p2	105	87	+ 18
	p3	183	63	+120
	p4	83	89	- 6
	p5	60	50	+ 10
	p6	106	84	+ 22
	p7	127	65	+ 62
	p8	82	83	- 1
	p9	86	31	+ 55
	p10	71	67	+ 4
	p11	116	73	+ 43
	p12	85	63	+ 22
	p13	96	53	+ 43
	p14	91	73	+ 18
	p15	84	58	+ 26
<hr/>				
	d^{n_1}			$+32.27$
	s_{n_1}			$= 31.73$
<hr/>				
	n_2	c_1/e_1	c_2/e_1	effet observé
	p16	86	52	+ 34
	p17	76	37	+ 39
	p18	88	34	+ 54
	p19	102	64	+ 38
	p20	75	76	- 1
	p21	63	62	+ 1
	p22	77	59	+ 18
	p23	105	72	+ 33
	p24	77	139	- 62
	p25	84	44	+ 40
	p26	136	71	+ 65
	p27	144	85	+ 59
	p28	123	107	+ 16
	p29	110	65	+ 45
	p30	123	67	+ 56
<hr/>				
	d^{n_2}			$+29.00$
	s_{n_2}			$= 32.08$

secondes

- la moyenne quadratique des écarts-types-corrigés pour chaque modalité n1 et n2

$$s = \left(\frac{31.73^2 + 32.08^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 31.91 \text{ secondes}$$

On a ici les relations suivantes:

$$cm_{c1,c2/e1} = 14076.02 = 15d^2 \quad (\text{ici } \frac{1}{15} = \frac{(+1)^2 + (-1)^2}{15+15})$$

$$cm_P(N).c1,c2/e1 = 508.98 = \frac{1}{2}s^2 \quad (\text{ici } 2 = (+1)^2 + (-1)^2)$$

Les valeurs $d = +30.63$ et $s = 31.91$ constituent le résumé descriptif de l'analyse spécifique de la comparaison $c1,c2/e1$. On observe donc ici que l'effet moyen est important: le gain initial dans l'apprentissage obtenu par la seule observation d'un sujet effectuant la tâche vaut en moyenne un peu moins de 31 secondes, soit près du triple du gain moyen par essai (10.95 secondes) obtenu par l'exécution effective de la tâche (dans la condition $c1$); en d'autres termes le gain initial obtenu dans la condition $c2$ équivalant à peu près à une économie de trois essais d'exécution. Le fait ici que s ait une valeur relativement élevée (le rapport $\frac{d}{s}$ valant $+0.96$) traduit la grande variabilité de l'effet d'une paire de sujets à l'autre; pour la paire p3 l'effet atteint deux minutes, alors que quatre paires de sujets présentent un effet négatif (jusqu'à 62 secondes pour la paire p24).

3.3.4 Analyse inductive

En procédant comme pour la comparaison $e1,e6/c1$, on obtient:

- pour le test de signification

$$t_{obs} = \frac{d}{\sqrt{bs}} = +5.26$$

avec, ici, $b = \frac{1}{15+15}$ et $q = 28$ degrés de liberté

$$F_{obs} = t_{obs}^2 = \frac{cm_{c1,c2/e1}}{cm_P(N).c1,c2/e1} = 27.66 \quad (\text{avec } 1 \text{ et } 28 \text{ d.l.})$$

- pour les procédures fiducio-bayésiennes

$$e^2 = \frac{d^2}{F_{obs}} = 5.832$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta^* &\sim t_{28} (+30.63, 5.832) \\ \sigma^* &\sim 31.91 \phi_{28}^{-1} \end{aligned}$$

Ces distributions sont figurées dans la figure 4.

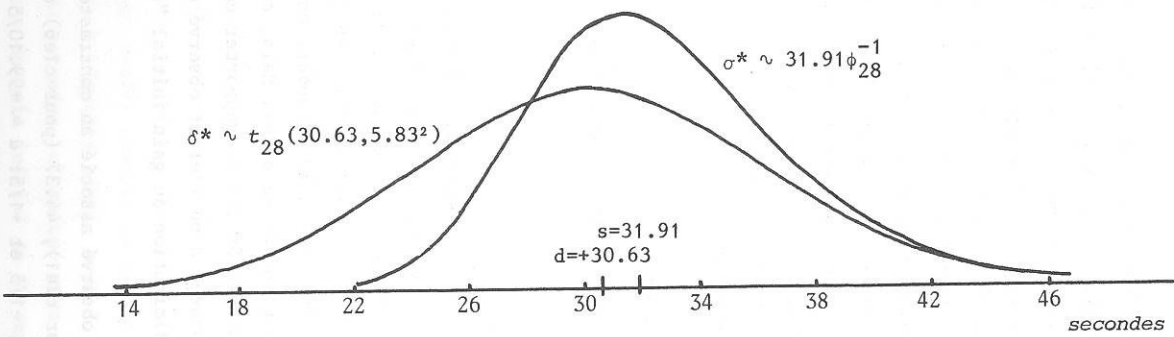


Figure 4 - Distributions fiducio-bayésiennes pour la comparaison $c1,c2/e1$

On en déduit les énoncés fiducio-bayésiens

$$\begin{aligned} P(\sigma^* > 0) &= 0.999993 \text{ (obtenu par programme)} \\ P(\sigma^* > +23.0) &= 0.90 \\ P(\sigma^* > 27.4) &= 0.90 \\ P(\sigma^* < 38.8) &= 0.90 \end{aligned}$$

La probabilité fiducio-bayésienne très élevée que δ soit positif est la traduction du résultat très significatif du test de signification. Ici encore cette conclusion peut être largement dépassée et on peut conclure, avec une garantie élevée, que l'effet théorique δ est important: la limite inférieure +23.0 obtenue pour une garantie 0.90 correspond à un peu plus du double du gain moyen par essai observé dans la condition c1 (10.95 secondes); en d'autres termes, la simple observation d'un sujet effectuant la tâche apparaît correspondre en moyenne à une "économie" d'au moins deux essais d'exécution effective. Peut-on conclure qu'il en est ainsi dans la plupart des cas? L'examen de la figure 4 montre que l'on ne peut pas ici (contrairement à la comparaison e1, e6/c1) tenir σ pour petit par rapport à δ , les distributions relatives à δ et à σ se "recouvrant" largement.

* 3.4 ANALYSE DE LA COMPARAISON c1, c2, e1, e6

La comparaison c1, c2, e1, e6 est encore une comparaison du type W/G1 (avec G1 = G).

3.4.1 Caractérisation de l'effet observé

La comparaison c1, c2, e1, e6 est une comparaison d'interaction. Il s'agit ici de comparer le gain initial (à l'essai e1), soit 30.63 secondes, au gain final (à l'essai e6), soit 44.37 - 37.97 = 6.40 secondes. On pourrait caractériser l'effet observé associé à la comparaison c1, c2, e1, e6 par la différence entre ces deux gains, soit 30.63 - 6.40 = +24.23 secondes: on observe une diminution du gain initial d'un peu plus de 24 secondes. Mais, comme pour la comparaison e1, e6/c1, nous choisirons plutôt ici de rapporter cette diminution au nombre d'essais qui l'ont occasionnée: d'où l'effet observé $d = +24.23/5 = +4.85$ secondes qui traduit la diminution du gain initial "en moyenne" par essai.

Formellement d est l'effet observé associé au contraste entre les moyennes 99.10 (pour c1e1), 68.47 (pour c2e1), 44.37 (pour c1e6) et 37.97 (pour c2e6) de coefficients +1/5, -1/5, -1/5 et +1/5: $d = +99.10/5 - 68.47/5 - 44.37/5 + 37.97/5$. Ce contraste est le produit des contrastes (+1, -1) représentant la comparaison c1, c2 et (+1/5, -1/5) représentant la comparaison e1, e6.

3.4.2 Recherche d'un protocole dérivé pertinent

Ici encore l'effet observé peut être défini pour chaque paire de sujets. Formellement le protocole des effets observés pour chaque paire de sujets est dérivé (par contraste) du sous-protocole $P_{KN_2} \times c1, c2, e1, e6$, comme l'indique le tableau 7; et ce protocole constitue les données de base pour l'analyse spécifique de la comparaison c1, c2, e1, e6, ou plus exactement du contraste qui a été choisi pour la représenter.

3.4.3 Analyse descriptive

Pour résumer le protocole numérique précédent, on considérera les statistiques suivantes:

$$- \text{La moyenne des effets moyens pour chaque modalité } n1 \text{ et } n2 \\ \left\| d = \frac{+4.12 + 5.57}{2} = +4.85 \text{ secondes} \right.$$

qui n'est autre que l'effet du contraste défini en 3.4.1

- La moyenne quadratique des écarts-types-corrigés pour chaque modalité n1 et n2

$$\left\| s = \left(\frac{6.22^2 + 6.36^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 6.29 \text{ secondes} \right.$$

On a ici les relations suivantes:

$$\begin{aligned} cm_{c1, c2, e1, e6} &= 4404.41 = 187.50d^2 \\ \left(\text{ici } \frac{1}{187.50} \right) &= \frac{(+1/5)^2 + (-1/5)^2 + (-1/5)^2 + (+1/5)^2}{15+15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cm_{P(N)} \cdot c1, c2, e1, e6 &= 247.21 = \frac{25}{4} s^2 \\ \left(\text{ici } \frac{4}{25} \right) &= (+1/5)^2 + (-1/5)^2 + (-1/5)^2 + (+1/5)^2 \end{aligned}$$

Les valeurs $d = +4.85$ et $s = 6.29$ constituent le résumé descriptif de l'analyse spécifique de la comparaison c1, c2, e1, e6. On observe donc ici que l'effet moyen est important: le gain initial ne se maintient pas à son niveau du premier essai, mais au contraire diminue de manière notable, la perte moyenne par essai (4.85 secondes) représentant 16% du gain moyen initial (30.63 secondes). Le fait ici que s ait une valeur relativement élevée (le rapport $\frac{d}{s}$ valant +0.77) traduit la variabilité considérable de l'effet d'une paire de sujets à l'autre: ainsi, pour la paire p3 la diminution du gain initial atteint 93 secondes, alors que pour la paire p24 on constate au contraire un accroissement du gain initial de 52 secondes!

Tableau 7 - Protocole dérivé pertinent pour la comparaison c1,c2,e1,e6

	c1e1	c2e1	c1e6	c2e6	effet observé
p1	129	81	57	44	+ 7.0
p2	105	87	44	48	+ 4.4
p3	183	63	57	30	+18.6
p4	83	89	47	54	+ 0.2
p5	60	50	36	25	- 0.2
p6	106	84	27	33	+ 5.6
p7	127	65	72	30	+ 4.0
p8	82	83	38	69	+ 6.0
p9	86	31	35	26	+ 9.2
p10	71	67	62	40	- 3.6
p11	116	73	120	35	- 8.4
p12	85	63	60	41	+ 0.6
p13	96	53	41	42	+ 8.8
p14	91	73	42	39	+ 3.0
p15	84	58	26	33	+ 6.6

	c1e1	c2e1	c1e6	c2e6	effet observé
p16	86	52	26	40	+ 9.6
p17	76	37	25	22	+ 7.2
p18	88	34	41	19	+ 6.4
p19	102	64	31	51	+11.6
p20	75	76	24	46	+ 4.2
p21	63	62	21	31	+ 2.2
p22	77	59	41	23	0
p23	105	72	42	27	+ 3.6
p24	77	139	36	46	-10.4
p25	84	44	54	23	+ 1.8
p26	136	71	30	40	+15.0
p27	144	85	43	62	+15.6
p28	123	107	35	51	+ 6.4
p29	110	65	62	38	+ 4.2
p30	123	67	56	31	+ 6.2

$$d^{n1} = +4.12$$

$$s_{n1} = 6.22$$

$$d^{n2} = +5.57$$

$$s_{n2} = 6.36$$

secondes

3.4.4 Analyse inductive

En procédant comme pour les deux comparaisons précédentes, on obtient:
- pour le test de signification

$$t_{obs} = \frac{d}{\sqrt{bs}} = +4.22$$

avec, ici, $b = \frac{1}{15+15}$ et $q = 28$ degrés de liberté

$$F_{obs} = t_{obs}^2 = \frac{cm_{c1,c2,e1,e6}}{cm_P(N).c1,c2,e1,e6} = 17.82 \text{ (avec 1 et 28 d.l.)}$$

- pour les procédures fiducio-bayésiennes

$$e^2 = \frac{d^2}{F_{obs}} = 1.15^2$$

d'où

$$\sigma^{*} \sim t_{28} (+4.85, 1.15^2)$$

$$\sigma^{*} \sim 6.29 \phi_{28}^{-1}$$

Ces distributions sont figurées dans la figure 5.

On en déduit les énoncés fiducio-bayésiens

$$P(\sigma^{*} > 0) = 0.99988 \text{ (obtenu par programme)}$$

$$P(\sigma^{*} > +3.3) = 0.90$$

$$P(\sigma^{*} > 5.4) = 0.90$$

$$P(\sigma^{*} < 7.6) = 0.90$$

Ici encore la probabilité fiducio-bayésienne très élevée que δ soit positif traduit le résultat très significatif du test de signification et on peut conclure avec une garantie élevée que l'effet δ est important: le gain initial trouvé dans la condition c2 diminue notablement, la limite inférieure obtenue pour une garantie 0.90, soit +3.3 secondes, représentant une diminution moyenne par essai supérieure à 10% du gain initial observé (30.63 secondes). De même que pour la comparaison c1,c2/e1, on ne peut pas conclure ici qu'il en est de même dans la plupart des cas, σ ne pouvant pas être tenu pour petit par rapport à δ .

*3.5 ANALYSE DE LA COMPARAISON n1,n2

Par rapport à la structure $A \ll G \gg T$, la comparaison n1,n2 est du type W/T1, comparaison W sur G conditionnelle à une partie T1 de T; on se trouve ici dans le cas particulier T1 = T, mais l'exemple a néanmoins valeur générale.

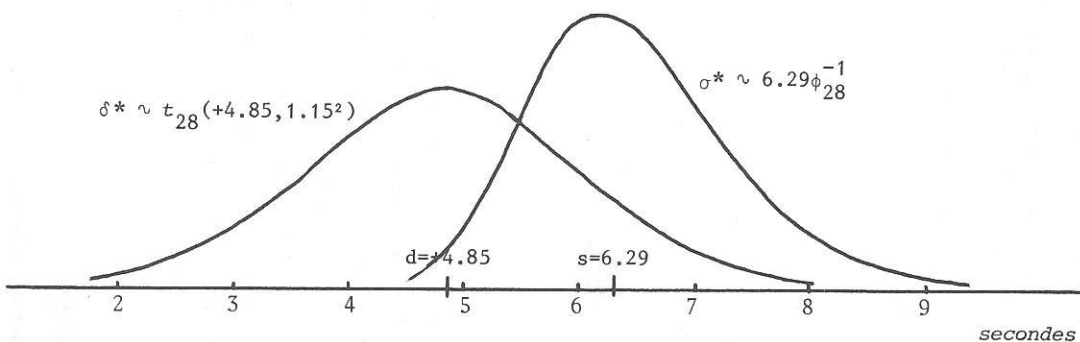


Figure 5 - Distributions fiducio-bayésiennes pour la comparaison c1,c2.e1,e6

3.5.1 Caractérisation de l'effet observé

Il s'agit ici de comparer le temps moyen d'exécution pour les étudiants en psychologie au temps moyen d'exécution pour les étudiants en mathématiques; descriptivement ces deux temps observés (qui sont les deux moyennes du protocole dérivé N_2 , ou $n1, n2$) sont respectivement 60.83 et 56.18 secondes. On caractérisera donc de manière naturelle l'effet observé associé à la comparaison $n1, n2$ par la différence entre ces deux moyennes, soit $d = 60.83 - 56.18 = +4.66$ secondes. Formellement d est l'effet observé associé au contraste entre moyennes de coefficients $+1$ et -1 .

3.5.2 Recherche d'un protocole dérivé pertinent

Le protocole dérivé pertinent sera le protocole qui, à chaque paire de sujets, à l'intérieur de chacune des deux modalités $n1$ et $n2$, associe la moyenne des 12 observations effectuées pour cette paire de sujets. Il s'agit donc ici du protocole dérivé par moyennage $P_{15} \langle N_2 \rangle / C \& F$, ou simplement $P_{15} \langle N_2 \rangle$; et ce protocole, présenté dans le tableau 8, constitue les données de base pour l'analyse spécifique de la comparaison $n1, n2$ (et il ne dépend pas du contraste choisi pour la représenter). On notera que le protocole dérivé pertinent est du même type que les protocoles pertinents pour les comparaisons précédentes, mais ici on utilise la dérivation par moyennage et non la dérivation par contraste (on ne peut pas définir l'effet pour chaque paire de sujets).

3.5.3 Analyse descriptive

Pour résumer le protocole numérique précédent, on considérera assez naturellement les statistiques suivantes:

- la moyenne des 15 observations pour chaque modalité $n1$ et $n2$

$$\bar{x}^{n1} = 60.833 \text{ et } \bar{x}^{n2} = 56.178$$

à partir desquelles on calcule l'effet observé du contraste défini en 3.5.1

$$d = 60.833 - 56.178 = +4.66 \text{ secondes}$$

- la moyenne quadratique des écarts-types-correctés pour chaque modalité $n1$ et $n2$

$$s = \left(\frac{12.99^2 + 13.85^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 13.42 \text{ secondes}$$

On a ici le lien suivant avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance:

$$cm_{n1, n2}^2 = 1950.68 = 90d^2 \quad \left(\text{ici } \frac{1}{90} = \frac{(+1)^2}{15 \times 12} + \frac{(-1)^2}{15 \times 12} \right)$$

Tableau 8 - Protocole dérivé pertinent pour la comparaison n1, n2

	n1	n2	
p1	69.583	p16	42.667
p2	63.833	p17	38.583
p3	81.500	p18	38.583
p4	54.500	p19	56.667
p5	41.250	p20	51.583
p6	52.750	p21	41.167
p7	70.083	p22	46.833
p8	68.333	p23	59.250
p9	39.167	p24	61.833
p10	60.333	p25	51.000
p11	80.333	p26	58.167
p12	62.917	p27	83.167
p13	56.583	p28	73.750
p14	67.750	p29	63.667
p15	43.583	p30	75.750
x n1 = 60.833		x n2 = 56.178	
s n1 = 12.987		s n2 = 13.847	

secondes

$$cm_{P(N)} = 2162.31 = 12s^2$$

(12 est le nombre de traitements sur lesquels on a moyenné)

Les valeurs d = +4.66 et s = 13.42 constituent le résumé descriptif de l'analyse de la comparaison n1, n2. On observe donc ici que le temps moyen d'exécution est inférieur d'un peu moins de 5 secondes pour les étudiants en mathématiques. Cette différence, qui représente 35% de l'écart-type-corrigé intra-groupe (s = 13.42), peut difficilement être tenue pour négligeable; on constate donc ici, au niveau descriptif, une certaine supériorité des étudiants en mathématiques vis-à-vis des étudiants en psychologie.

3.5.4 Analyse inductive

Le protocole dérivé pertinent étant du même type que pour les comparaisons précédentes, on est encore ramené pour les procédures inférentielles à un problème analogue. Le point nouveau est qu'ici l'inférence porte sur la différence entre les moyennes pour chaque modalité n1 et n2, et non plus sur la moyenne de ces moyennes. Ceci n'a aucune incidence sur le modèle et on pose, comme précédemment, le modèle *équinormal des groupes séparés*: à l'intérieur de chaque modalité n, on pose le modèle normal caractérisé par les paramètres μ^n (moyenne théorique pour la modalité n) et σ (écart-type théorique); l'effet théorique est bien entendu défini comme la différence $\delta = \mu^{n1} - \mu^{n2}$.

On obtient cette fois:

- pour le test de signification

$$t_{obs} = \frac{d}{\sqrt{bs}} = +0.95$$

avec, ici, $b = \frac{(+1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} = \frac{2}{15}$ et $q = 28$ degrés de liberté

$$F_{obs} = t_{obs}^2 = \frac{cm_{n1, n2}}{cm_{P(N)}} = 0.90 \text{ (avec 1 et 28 d.l.)}$$

- pour les procédures fiducio-bayésiennes

$$e^2 = \frac{d^2}{F_{obs}} = 4.90^2$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta^* &\sim t_{28} (+4.66, 4.90^2) \\ \sigma^* &\sim 13.42 \phi_{28}^{-1} \end{aligned}$$

Ces distributions sont figurées dans la figure 6.

On en déduit les énoncés fiducio-bayésiens

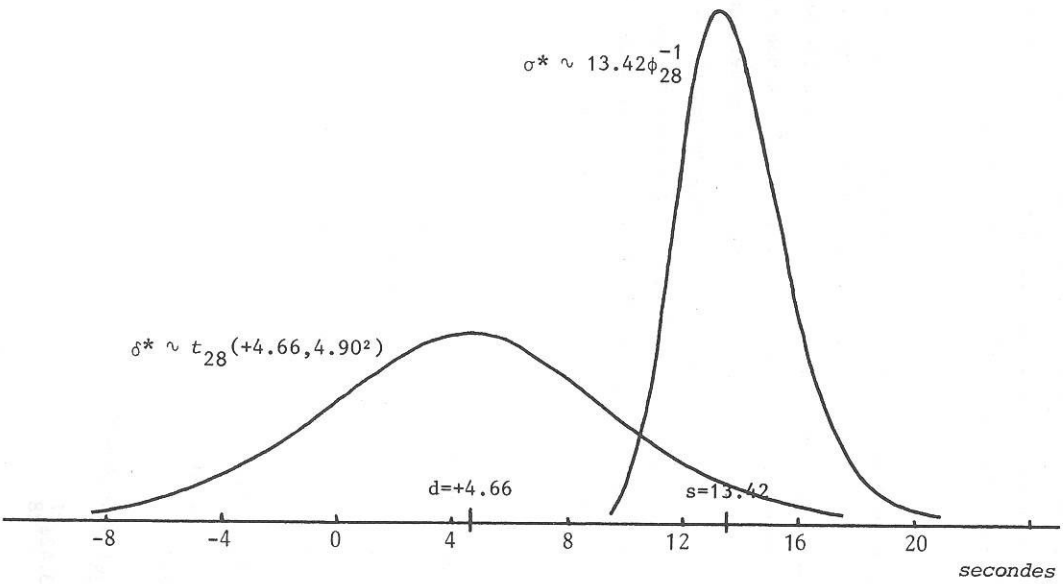


Figure 6 - Distributions fiducio-bayésiennes pour la comparaison n_1, n_2

$$P(\theta^* > 0) = 0.825 \text{ (obtenu par programme)}$$

$$P(|\theta^*| < 11.1) = 0.90$$

$$P(\theta^* > 11.5) = 0.90$$

$$P(\theta^* < 16.3) = 0.90$$

Les pratiques liées à l'utilisation du test de signification conduisent ici à déclarer le résultat du test *non-significatif*; traduit dans le cadre fiducio-bayésien, cela revient à considérer que la probabilité que δ soit positif (0.825) ne constitue pas une garantie suffisamment élevée en faveur de l'existence d'un effet (positif). Bien entendu un tel constat ne saurait en aucun cas nous amener à conclure à la non-existence de l'effet, ni même à l'existence d'un effet *négligeable*: ici on peut seulement énoncer qu'avec la garantie fiducio-bayésienne 0.90 l'effet est en valeur absolue inférieur à 11.1 secondes. En aucun cas on ne peut donc établir que l'effet est négligeable; d'ailleurs cela est déjà impliqué par le fait que l'effet observé est lui-même jugé non négligeable.

On est donc ici dans un cas typique où l'information expérimentale ne nous accorde pas des garanties suffisantes pour prolonger la conclusion descriptive; il nous faut donc réserver notre jugement si nous désirons nous en tenir à cette seule source d'information.

* 3.6 ANALYSE DE LA COMPARAISON $e_1, e_6, n_1, n_2/c_1$

Par rapport à la structure $\underline{A} \langle G \rangle T$, la comparaison $e_1, e_6, n_1, n_2/c_1$ est du type interaction entre une comparaison W sur G (soit n_1, n_2) et une comparaison W sur T (soit $e_1, e_6/c_1$).

3.6.1 Caractérisation de l'effet observé

L'effet observé associé à la comparaison $e_1, e_6/c_1$ a été caractérisé en 3.2.1 comme la diminution du temps d'exécution "en moyenne" par essai dans la condition c_1 ; cette diminution a été calculée (en 3.2.3), d'une part pour les étudiants en psychologie ($d^{n_1} = +9.87$) et d'autre part pour les étudiants en mathématiques ($d^{n_2} = +12.03$). Pour la comparaison d'interaction $e_1, e_6, n_1, n_2/c_1$ il s'agit de comparer le gain obtenu par les étudiants en psychologie au gain obtenu par les étudiants en mathématiques; on caractérisera donc de manière naturelle l'effet associé à la comparaison $e_1, e_6, n_1, n_2/c_1$ par la différence entre ces deux gains, soit $d = +9.87 - (+12.03) = -2.16$ secondes. Formellement d est l'effet associé au contraste entre les moyennes 100.27 (pour $n_1 \times c_1 e_1$), 50.93 (pour $n_1 \times c_1 e_6$), 97.93 (pour $n_2 \times c_1 e_1$) et 37.80 (pour $n_2 \times c_1 e_6$) de coefficients $+1/5, -1/5, -1/5$ et $+1/5$: $d = +100.27/5 - 50.93/5 - 97.93/5 + 37.80/5$.

Ce contraste est le produit des contrastes $(+1/5, -1/5)$ représentant la comparaison $e1, e6/c1$ et $(+1, -1)$ représentant la comparaison $n1, n2$.

3.6.2 Recherche d'un protocole dérivé pertinent

A l'évidence le protocole dérivé pertinent pour l'analyse de la comparaison $e1, e6, n1, n2/c1$ est le même que pour la comparaison $e1, e6/c1$ (cf 3.2.2).

3.6.3 Analyse descriptive

Pour résumer le protocole numérique précédent, on considérera comme en 3.2.3:

- Les moyennes $d^{n1} = +9.87$ et $d^{n2} = +12.03$ à partir desquelles on calcule l'effet observé du contraste défini en 3.6.1

$$\| d = +9.87 - (+12.03) = -2.16 \text{ secondes}$$

- La moyenne quadratique des écarts-types-corrigés pour chaque modalité $n1$ et $n2$

$$\| s = 5.46 \text{ secondes}$$

On a ici le lien suivant avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance:

$$cm_{e1, e6, n1, n2/c1} = 437.40 = 93.75d^2$$

$$\left(\text{ici } \frac{1}{93.75} = \frac{(+1/5)^2}{15} + \frac{(-1/5)^2}{15} + \frac{(-1/5)^2}{15} + \frac{(+1/5)^2}{15} \right)$$

$$cm_P(N).e1, e6/c1 = 372.45 = \frac{25}{2}s^2 \text{ (comme en 3.2.3)}$$

Les valeurs $d = -2.16$ et $s = 5.46$ constituent le résumé descriptif de l'analyse de la comparaison $e1, e6, n1, n2/c1$. On observe donc ici que le gain obtenu dans le temps d'exécution ("l'effet d'apprentissage") est plus élevé chez les étudiants en mathématiques d'un peu plus de deux secondes par essai, ce qui représente environ 20% du gain moyen calculé sur l'ensemble des étudiants (10.95 secondes: effet associé à la comparaison $e1, e6/c1$), et peut donc être tenu pour appréciable.

3.6.4 Analyse inductive

Le protocole dérivé pertinent est toujours du même type; plus précisément ici, il s'agit du même protocole que celui pertinent pour l'analyse de la comparaison $e1, e6/c1$ (comparaison du type W/T1). On posera donc toujours pour ce protocole le modèle *équinoxial des groupes séparés*; mais ici l'inférence portera sur la différence entre les effets moyens pour chaque modalité

$n1$ et $n2$ (l'effet théorique associé à la comparaison $e1, e6, n1, n2/c1$ étant $\delta = \delta^{n1} - \delta^{n2}$), et non plus sur la moyenne de ces deux effets (effet "global" de la comparaison $e1, e6/c1$). On pourra rapprocher cette situation de celle rencontrée dans l'analyse de la comparaison $n1, n2$: l'analyse d'une comparaison du type W.M combine en quelque sorte les procédures de l'analyse d'une comparaison W/G1 (pour la recherche du protocole dérivé pertinent) et de l'analyse d'une comparaison W/T1 (pour la caractérisation de l'effet à partir du protocole pertinent).

On obtient cette fois:

- pour le test de signification

$$t_{\text{obs}} = \frac{d}{\sqrt{bs}} = -1.08$$

avec, ici, $b = \frac{(+1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} = \frac{2}{15}$, comme pour la comparaison $n1, n2$, et $q = 28$ degrés de liberté

$$\| F_{\text{obs}} = t_{\text{obs}}^2 = \frac{cm_{e1, e6, n1, n2/c1}}{cm_P(N).e1, e6/c1} = 1.17 \text{ (avec 1 et 28 d.l.)}$$

- pour les procédures fiducio-bayésiennes

$$e^2 = \frac{d^2}{F_{\text{obs}}} = 1.99^2$$

d'où

$$\| \delta^* \sim t_{28}(-2.16, 1.99^2)$$

$$\| \sigma^* \sim 5.46 \phi_{28}^{-1}$$

Ces distributions sont figurées dans la figure 7.

On en déduit les énoncés fiducio-bayésiens

$$P(\delta^* < 0) = 0.857 \text{ (obtenu par programme)}$$

$$P(|\delta^*| < 4.8) = 0.90$$

(pour σ cf 3.2.4)

La situation est analogue à celle rencontrée pour la comparaison $n1, n2$: la conclusion descriptive ne peut pas être prolongée inductivement. Ce constat est déjà impliqué par le résultat non-significatif du test de signification; on ne peut conclure à l'existence d'un effet et donc, a fortiori, on ne peut établir que l'effet est important.

* 3.7 ANALYSE DE LA COMPARAISON $c1, c2, n1, n2/e1$

La comparaison $c1, c2, n1, n2/e1$ est du même type que la comparaison $e1, e6, n1, n2/c1$ (type W.M); elle sera donc traitée de la même manière.

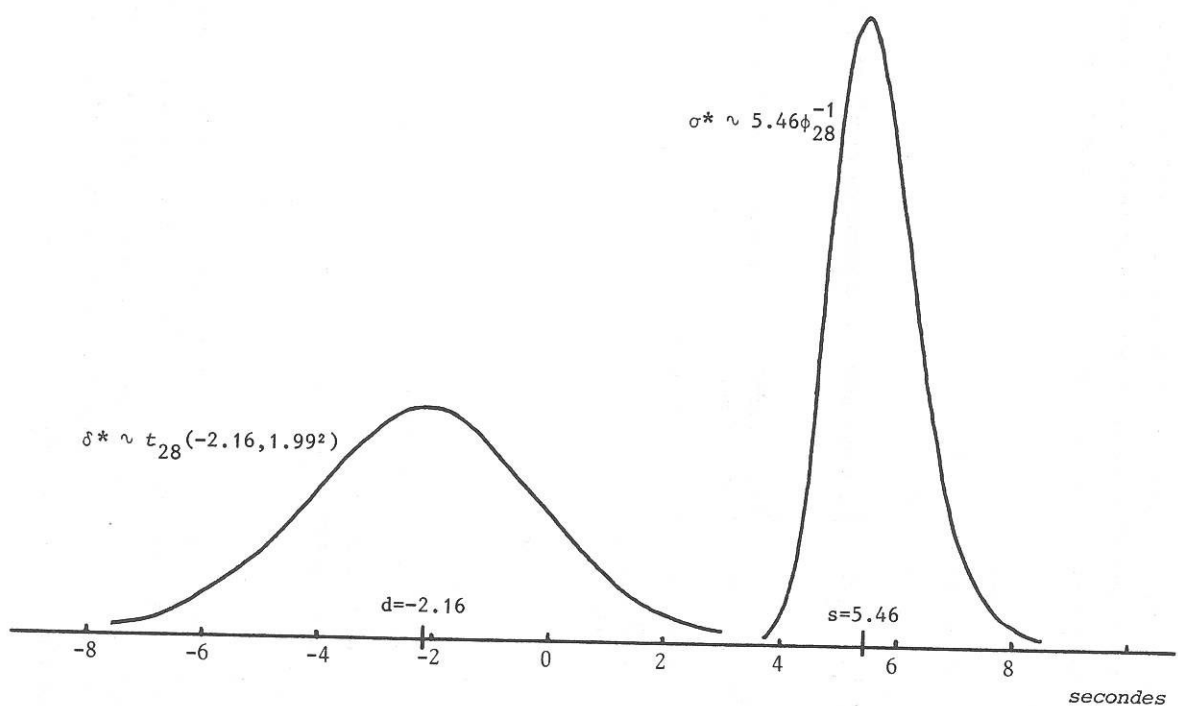


Figure 7 - Distributions fiducio-bayésiennes pour la comparaison $e_1, e_6, n_1, n_2/c_1$

3.7.1 Caractérisation de l'effet observé

L'effet observé associé à la comparaison c_1, c_2 a été caractérisé en 3.3.1 comme la différence entre les temps moyens d'exécution au premier essai dans la condition c_1 et dans la condition c_2 ; cette différence a été calculée (en 3.3.2), d'une part pour les étudiants en psychologie ($d^{n1} = +32.27$) et d'autre part pour les étudiants en mathématiques ($d^{n2} = +29.00$). On caractérisera donc l'effet associé à la comparaison d'interaction $c_1, c_2, n_1, n_2/e_1$ par la différence entre ces deux différences, soit $d = +32.27 - (+29.00) = +3.27$ secondes. Formellement d est l'effet associé au contraste entre les moyennes 100.27 (pour $n_1 \times c_1 e_1$), 68.00 (pour $n_1 \times c_2 e_1$), 97.93 (pour $n_2 \times c_1 e_1$) et 68.93 (pour $n_2 \times c_2 e_1$) de coefficients +1, -1, -1, +1: $d = 100.27 - 68.00 - 97.93 + 68.93$; ce contraste est le produit des contrastes (+1, -1) représentant la comparaison $c_1, c_2/e_1$ et (+1, -1) représentant la comparaison n_1, n_2 .

3.7.2 Recherche d'un protocole dérivé pertinent

Il s'agit du même protocole dérivé pertinent que pour la comparaison $c_1, c_2/e_1$ (cf 3.3.2).

3.7.3 Analyse descriptive

Pour résumer le protocole numérique précédent, on considérera comme en

3.3.3:

- les moyennes $d^{n1} = +32.27$ et $d^{n2} = +29.00$ à partir desquelles on calcule l'effet observé du contraste défini en 3.7.1

$$d = +32.27 - (+29.00) = +3.27 \text{ secondes}$$

- la moyenne quadratique des écarts-types-corrigés pour chaque modalité n_1 et n_2

$$s = 31.91 \text{ secondes}$$

On a ici les relations:

$$cm_{c_1, c_2, n_1, n_2/e_1} = 40.02 = 3.75d^2$$

$$\left(\text{ici } \frac{1}{3.75} = \frac{(+1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} \right)$$

$$cm_P(N), c_1, c_2/e_1 = 508.98 = \frac{1}{2}s^2 \text{ (comme en 3.3.3)}$$

Les valeurs $d = +3.27$ et $s = 31.91$ constituent le résumé descriptif de l'analyse spécifique de la comparaison $c_1, c_2, n_1, n_2/e_1$. Ainsi le gain moyen obtenu au premier essai par l'observation d'un sujet effectuant la tâche ("effet d'apprentissage incident") est plus élevé chez les étudiants en

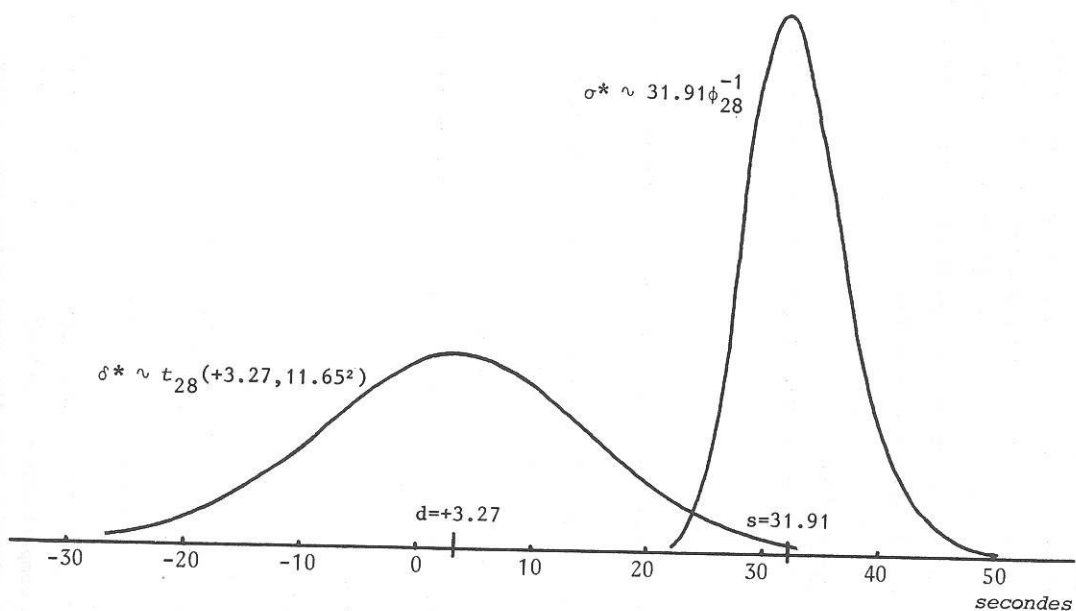


Figure 8 - Distributions fiducio-bayésiennes pour la comparaison c1,c2.n1,n2/e1

psychologie d'un peu plus de trois secondes; ceci représente entre 10% et 11% du gain moyen calculé sur l'ensemble des étudiants (30.63 secondes: effet associé à la comparaison c1,c2/e1) et, relativement à ce critère, peut être tenu pour assez faible (on parvient à la même appréciation si l'on rapporte l'effet d = +3.27 à la valeur de s, soit ici $\frac{d}{s} = +0.10$).

3.7.4 Analyse inductive

On procède comme pour la comparaison e1,e6.n1,n2/e1 et on obtient cette fois:

$$t_{obs} = \frac{d}{\sqrt{bs}} = +0.28$$

avec, ici, $b = \frac{2}{15}$, comme pour la comparaison n1,n2, et q = 28 degrés de liberté

$$F_{obs} = t_{obs}^2 = \frac{cm}{cmP(N).c1,c2/e1} = 0.079 \text{ (avec 1 et 28 d.l.)}$$

- pour les procédures fiducio-bayésiennes

$$e^2 = \frac{d^2}{F_{obs}} = 11.65^2$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta^* &\sim t_{28}(+3.27, 11.65^2) \\ \sigma^* &\sim 31.91 \phi_{28}^{-1} \end{aligned}$$

Ces distributions sont figurées dans la figure 8.

On en déduit les énoncés fiducio-bayésiens

$$\begin{aligned} P(\delta^* > 0) &= 0.609 \text{ (obtenu par programme)} \\ P(|\delta^*| < 20.5) &= 0.90 \\ &\text{(pour } \sigma \text{ cf 3.3.4)} \end{aligned}$$

Le résultat non-significatif du test de signification se traduit par une probabilité fiducio-bayésienne relativement faible (0.609) que l'effet δ soit positif, soit encore par la probabilité 0.391 (1 - 0.609) que l'effet soit de signe contraire au signe de l'effet observé. Ici la situation est cependant différente de celle rencontrée pour les deux comparaisons précédentes, puisque, cette fois, l'effet observé est jugé faible: on pourrait donc espérer prolonger inductivement ce résultat. Malheureusement la dispersion de la distribution fiducio-bayésienne relative à δ est telle (voir la figure 8) qu'aucune conclusion utile ne peut être obtenue.

* 3.8 ANALYSE DE LA COMPARAISON $c_1, c_2, e_1, e_6, n_1, n_2$

La comparaison $c_1, c_2, e_1, e_6, n_1, n_2$ est encore une comparaison du type W, M (et la comparaison $W = c_1, c_2, e_1, e_6$ étant elle-même ici une comparaison d'interaction).

3.8.1 Caractérisation de l'effet observé

L'effet observé associé à la comparaison c_1, c_2, e_1, e_6 a été caractérisé en 3.4.1 comme la différence entre le gain initial et le gain final divisée par cinq; cette différence a été calculée (en 3.4.2), d'une part pour les étudiants en psychologie ($d^{n1} = +4.12$) et d'autre part pour les étudiants en mathématiques ($d^{n2} = +5.57$). On caractérisera donc l'effet associé à la comparaison d'interaction $c_1, c_2, e_1, e_6, n_1, n_2$ par la différence $d = +4.12 - (+5.57) = -1.45$ secondes. Formellement d est l'effet observé associé au contraste entre les huit moyennes du protocole $n_1, n_2, c_1, c_2, e_1, e_6$ de coefficients $+1/5, -1/5, -1/5, +1/5, +1/5, -1/5, -1/5, +1/5$: $d = +100.27/5 - 50.93/5 - 68.00/5 + 39.27/5 - 97.93/5 + 37.80/5 + 68.93/5 - 36.67/5$; ce contraste est le produit des contrastes $(+1, -1)$ représentant la comparaison c_1, c_2 , $(+1/5, -1/5)$ représentant la comparaison e_1, e_6 et $(+1, -1)$ représentant la comparaison n_1, n_2 .

3.8.2 Recherche d'un protocole dérivé pertinent

Il s'agit du même protocole dérivé pertinent que pour la comparaison c_1, c_2, e_1, e_6 (cf 3.4.2).

3.8.3 Analyse descriptive

Pour résumer le protocole dérivé précédent, on considérera comme en 3.4.3:

- les moyennes $d^{n1} = +4.12$ et $d^{n2} = +5.57$ à partir desquelles on calcule l'effet observé du contraste défini en 3.8.1
- || $d = +4.12 - (+5.57) = -1.45$ secondes
- la moyenne quadratique des écarts-types-corrigés pour chaque modalité n_1 et n_2
- || $s = 6.29$ secondes

On a ici les relations:

$$c_1, c_2, e_1, e_6, n_1, n_2 = 99.01 = 46.875d^2$$

$$(ici \frac{1}{46.875} = 4 \times \frac{(+1/5)^2}{15} + 4 \times \frac{(-1/15)^2}{15})$$

$$c_{MP(N)}.c_1, c_2, e_1, e_6 = 247.21 = \frac{25}{4} s^2 \text{ (comme en 3.4.3)}$$

Les valeurs $d = -1.45$ et $s = 6.29$ constituent le résumé descriptif de l'analyse spécifique de la comparaison $c_1, c_2, e_1, e_6, n_1, n_2$. On observe ici que la perte par rapport au gain initial est plus forte chez les étudiants en mathématiques de près d'une seconde et demie en moyenne par essai, ce qui représente 30% de la perte moyenne calculée sur l'ensemble des étudiants (4.87 secondes: effet associé à la comparaison c_1, c_2, e_1, e_6), et peut donc être tenu pour appréciable (toutefois, ici, le rapport $\frac{d}{s}$ n'atteint que la valeur -0.23).

3.8.4 Analyse inductive

En procédant comme pour les deux comparaisons précédentes, on obtient:

$$\text{pour le test de signification}$$

$$t_{obs} = \frac{d}{\sqrt{s}} = -0.63$$

avec, ici, $b = \frac{2}{15}$, comme pour la comparaison n_1, n_2 , et $q = 28$ degrés de liberté

$$F_{obs} = t_{obs}^2 = \frac{c_{c_1, c_2, e_1, e_6, n_1, n_2}^2}{c_{MP(N)}.c_1, c_2, e_1, e_6} = 0.40 \text{ (avec 1 et 28 d.l.)}$$

- pour les procédures fiducio-bayésiennes

$$e^2 = \frac{d^2}{F_{obs}} = 2.30^2$$

d'où

$$\sigma^* \sim t_{28}(-1.45, 2.30^2)$$

$$\sigma^* \sim 6.29 \phi_{28}^{-1}$$

Ces distributions sont figurées dans la figure 9.

On en déduit les énoncés fiducio-bayésiens

$$P(\phi^* < 0) = 0.733 \text{ (obtenu par programme)}$$

$$P(|\phi^*| < 4.6) = 0.90$$

(pour σ cf 3.4.4)

On retrouve la situation rencontrée pour les comparaisons n_1, n_2 et $e_1, e_6, n_1, n_2/c_1$: le résultat non-significatif du test de signification implique que l'impossibilité de prolonger inductivement l'observation d'un effet appréciable.

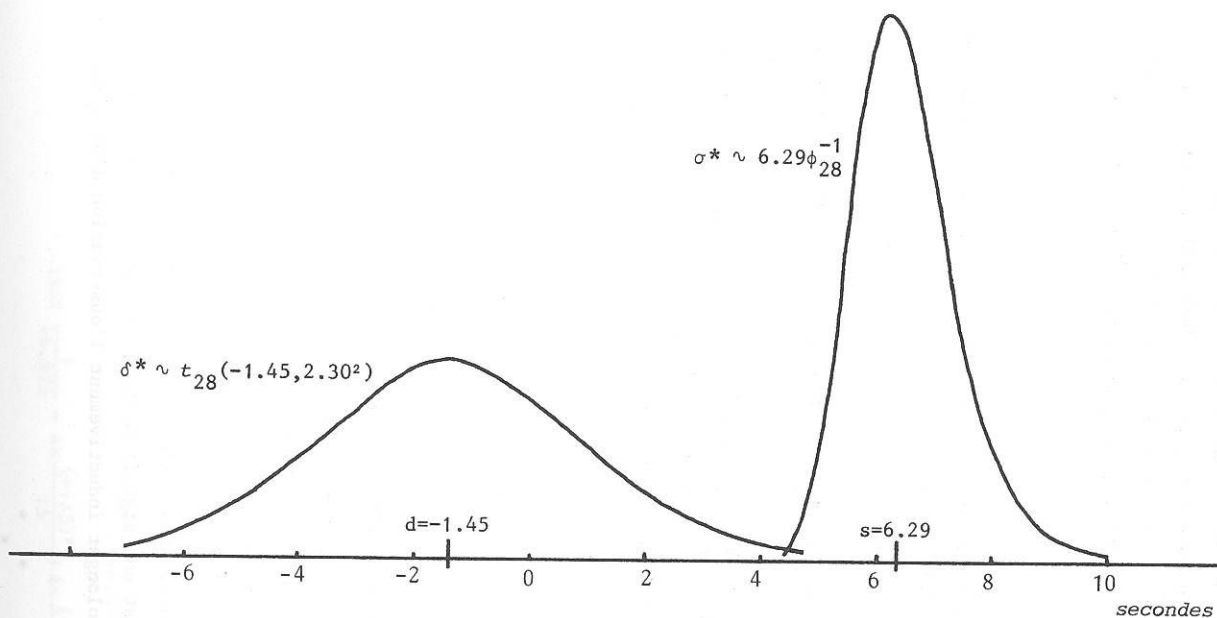


Figure 9 - Distributions fiducio-bayésiennes pour la comparaison c1,c2.e1,e6.n1,n2

4 SYNTHÈSE DES RESULTATS

Un résumé des principaux résultats numériques des analyses spécifiques effectuées est présenté dans le tableau 9.

En reprenant les questions qui ont été posées à propos de cette expérience d'apprentissage perceptif incident, nous pouvons maintenant résumer les principaux résultats de l'analyse inductive.

(1) "Est-ce que la répétition de la tâche permet d'obtenir une diminution du temps d'exécution pour les sujets de la première condition?" - La réponse est affirmative; on peut conclure que cette diminution est importante dans la plupart des cas.

(2) "Est-ce que l'apprentissage perceptif préalable procure aux sujets de la deuxième condition un gain initial dans le temps d'exécution?" - La réponse est affirmative; on peut conclure que le gain initial est en moyenne important (mais pas qu'il est important dans la plupart des cas).

(3) "Est-ce que ce gain éventuel tend à diminuer avec la répétition de la tâche?" - La réponse est encore affirmative; on peut conclure que le gain initial diminue en moyenne de manière notable.

(4) "Est-ce que les réponses à chacune des trois questions précédentes sont identiques ou différentes, suivant la catégorie d'étudiants considérée?" - Ici l'information expérimentale apparaît insuffisante pour parvenir à une conclusion concernant le facteur Nature des études.

* * *
* * *

Tableau 9 - Résumé des principaux résultats numériques des analyses spécifiques

	Analyse descriptive	Carré-moyen	Rapport F (d.l.)	Indice d'échelle de la distribution fiducio-bayésienne	Enoncé fiducio-bayésien
e1,e6/c1	d = +10.95	44936.07	120.65 (1-28)	e = 1.00	$P(\delta^* > +9.6) = 0.90$
P(N).e1,e6/c1	s = 5.46	372.45			$P(\sigma^* < 6.6) = 0.90$
c1,c2/e1	d = +30.63	14076.02	27.66 (1-28)	e = 5.83	$P(\delta^* > +23.0) = 0.90$
P(N).c1,c2/e1	s = 31.91	508.98			$P(\sigma^* < 38.8) = 0.90$
c1,c2.e1,e6	d = +4.85	4404.41	17.82 (1-28)	e = 1.15	$P(\delta^* > +3.3) = 0.90$
P(N).c1,c2.e1,e6	s = 6.29	247.21			$P(\sigma^* < 7.6) = 0.90$
n1,n2	d = +4.66	1950.68	0.90 (1-28)	e = 4.90	$P(\delta^* < 11.1) = 0.90$
P(N)	s = 13.42	2162.31			$P(\sigma^* < 16.3) = 0.90$
e1,e6.n1,n2/c1	d = -2.16	437.40	1.17 (1-28)	e = 1.99	$P(\delta^* < 4.8) = 0.90$
P(N).e1,e6/c1	s = 5.46	372.45			
c1,c2.n1,n2/e1	d = +3.27	40.02	0.08 (1-28)	e = 11.65	$P(\delta^* < 20.5) = 0.90$
P(N).c1,c2/e1	s = 31.91	508.98			
c1,c2.e1,e6.n1,n2	d = -1.45	99.01	0.40 (1-28)	e = 2.30	$P(\delta^* < 4.6) = 0.90$
P(N).c1,c2.e1,e6	s = 6.29	247.21			

CHAPITRE VI

*

ILLUSTRATION DES PROCEDURES COMPLEMENTAIRES

1 INTRODUCTION

* 1.1 PROCEDURES COMPLEMENTAIRES

Les solutions fiducio-bayésiennes pour l'inférence sur l'effet d'un contraste, illustrées dans le chapitre précédent, fournissent les procédures de base qui permettent de faire face aux situations les plus usuelles. Pour couvrir plus largement la gamme des situations qui peuvent se présenter dans la pratique, il convient cependant de compléter les solutions précédentes par d'autres procédures. Ces procédures, répondant à des problèmes plus complexes, seront généralement d'une mise en oeuvre pratique un peu moins aisée; en particulier il faudra, dans la plupart des cas, avoir recours à des programmes informatiques (en petit nombre) pour les calculs liés à l'utilisation des distributions (densités, énoncés de probabilité).

Reprenant l'exemple de l'expérience d'apprentissage perceptif incident, nous illustrerons dans ce chapitre les solutions que l'Analyse Bayésienne des Comparaisons apporte aux problèmes suivants: analyse des comparaisons à plusieurs degrés de liberté (inférence relative à la grandeur de l'effet λ); inférence relative au rapport δ/σ ou λ/σ ; combinaison des informations (procédures bayésiennes); prédiction relative à une nouvelle expérience (procédures prédictives); cas non-équilibré.

* 1.2 PLAN DU CHAPITRE

- 2 COMPARAISONS A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE.....

 - 2.1 Analyse de la comparaison n_1, n_2, n_3, \dots
 - 2.2 Analyse de la comparaison $c_1, c_2, n_1, n_2, n_3, e_1, \dots$

- 3 INFERENCE RELATIVE AU RAPPORT δ/σ OU AU RAPPORT λ/σ

 - 3.1 Inférence fiducio-bayésienne relative au rapport δ/σ
 - 3.2 Inférence fiducio-bayésienne relative au rapport λ/σ

- 4 UNE AUTRE PLANIFICATION POSSIBLE DES ANALYSES SPECIFIQUES.....

 - 4.1 Analyse de la comparaison LIN E/c1.....
 - 4.2 Analyse de la comparaison $n_1, n_2, \dots, \text{LIN E/c1}$
 - 4.3 Analyse de la comparaison E-LIN E/c1.....
 - 4.4 Analyse de la comparaison $n_1, n_2, E\text{-LIN E/c1}$
 - 4.5 Analyse de la comparaison $n_1, n_2, n_3, E\text{-LIN E/c1}$

- 5 COMBINAISON DES INFORMATIONS.....

 - 5.1 Comparaisons à un degré de liberté (analyse d'un contraste).....
 - 5.2 Comparaisons à plusieurs degrés de liberté.....

6 PROCEDURES PREDICTIVES.....

6.1 Procédures prédictives pour une réplique de l'expérience.....

6.2 Illustration d'une propriété des distributions prédictives....

7 CAS NON-EQUILIBRE.....

7.1 Analyse de la comparaison e1,e6/c1.....

7.2 Analyse de la comparaison n1,n2,n3/n1*c1.....

7.3 Analyse de la comparaison n1,n2,n3.h1,h2/c1.....

7.4 Analyse de la comparaison n1,n2*h1,h2.F-LIN E/c1.....

*
*

2 COMPARAISONS A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE

Pour illustrer l'analyse des comparaisons à plusieurs degrés de liberté, nous reprendrons l'exemple de l'expérience d'apprentissage perceptif *incident*, en introduisant un groupe supplémentaire de 15 paires de sujets. Le facteur N (*Nature des études*) aura donc désormais trois modalités: n1 (étudiants en psychologie), n2 (étudiants en mathématiques), comme précédemment, et n3 (étudiants en médecine); d'où le plan d'analyse $F_{15} \times N_3 \times C_2 \times B_6$.

Dans ce cas, la même planification des analyses spécifiques que dans le chapitre précédent conduit à considérer trois comparaisons à un degré de liberté:

$$\begin{array}{l} \parallel e1,e6/c1 \\ \parallel c1,c2/e1 \\ \parallel e1,e6.c1,c2 \end{array}$$

et quatre comparaisons à deux degrés de liberté:

$$\begin{array}{l} \parallel n1,n2,n3 \text{ (que l'on pourrait encore écrire } N_3) \\ \parallel e1,e6.n1,n2,n3/c1 \\ \parallel c1,c2.n1,n2,n3/e1 \\ \parallel c1,c2.e1,e6.n1,n2,n3 \end{array}$$

L'analyse des comparaisons à un degré de liberté s'effectuerait bien entendu comme dans le cas précédent; simplement d et s seraient calculés en moyennant sur les trois modalités n1, n2 et n3 (et non plus seulement sur n1 et n2). Nous développerons maintenant l'analyse des comparaisons n1,n2,n3 (exemple d'une comparaison à plusieurs degrés de liberté du type W/T1) et c1,c2.n1,n2,n3/e1 (exemple d'une comparaison à plusieurs degrés de liberté du type W/M). D'autres exemples, en particulier l'analyse d'une comparaison du type W/G1, seront traités plus loin.

* 2.1 ANALYSE DE LA COMPARAISON n1,n2,n3

Par rapport à la structure $A \times G \times T$, la comparaison n1,n2,n3 est du type W/T1; on se trouve ici dans le cas particulier d1(W) = 2 et T1 = T, mais l'exemple a néanmoins valeur générale.

2.1.1 Caractérisation de la grandeur de l'effet observé

Il s'agit de comparer globalement les trois temps moyens d'exécution au premier essai pour les étudiants en psychologie, les étudiants en mathématiques et les étudiants en médecine; descriptivement ces trois temps observés

(qui sont les trois moyennes du protocole dérivé N_3 ou n_1, n_2, n_3) sont respectivement 60.83, 56.18 et 58.56 secondes. Comment, dans ce cas, caractériser numériquement la grandeur de l'effet observé, sans introduire de décomposition particulière de l'effet? Il apparaît raisonnable de construire un indicateur de la grandeur de l'effet à partir des valeurs absolues des différences entre les trois moyennes prises deux à deux:

$$\begin{aligned} |60.83 - 56.18| &= 4.66 \\ |60.83 - 58.56| &= 2.27 \\ |56.18 - 58.56| &= 2.38 \end{aligned}$$

Ces différences, ordonnées, valent donc 2.27, 2.38 et 4.66 et on peut prendre comme indicateur de la grandeur de l'effet associé à la comparaison n_1, n_2, n_3 leur moyenne quadratique, soit:

$$\left\| 1 = \left(\frac{4.66^2 + 2.27^2 + 2.38^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = 3.29 \text{ secondes} \right.$$

A titre indicatif, la moyenne arithmétique de ces différences absolues est 3.10 secondes; on vérifiera aisément que cette moyenne arithmétique vaut les deux tiers de la différence entre n_1 et n_2 (4.66), c'est-à-dire ne fait pas intervenir n_3 , et ne serait donc guère satisfaisante pour caractériser numériquement la grandeur de l'effet observé associé à la comparaison globale n_1, n_2, n_3 .

(Dans ce cas particulier d'un facteur à trois modalités, la moyenne arithmétique précédente est égale aux deux tiers de la différence entre les deux valeurs extrêmes observées)

2.1.2 Recherche d'un protocole dérivé pertinent

Le protocole dérivé pertinent est le protocole qui, à chaque paire de sujets, à l'intérieur de chacune des trois modalités n_1, n_2 et n_3 associe la moyenne des 12 observations effectuées pour cette paire de sujets. Il s'agit donc ici du protocole dérivé par moyennage $P_{15} \langle N_3 \rangle / C \times E$, ou simplement $P_{15} \langle N_3 \rangle$ (dont le protocole $P_{15} \langle N_2 \rangle$ considéré au chapitre précédent pour l'analyse de la comparaison n_1, n_2 est un sous-protocole). Ce protocole, présenté dans le tableau 1, constitue les données de base pour l'analyse spécifique de la comparaison n_1, n_2, n_3 ; il s'agit encore ici d'un protocole numérique, bien que la comparaison analysée soit à deux degrés de liberté.

2.1.3 Analyse descriptive

Pour résumer le protocole numérique précédent, on considérera les statistiques suivantes:

Tableau 1 - Protocole dérivé pertinent pour la comparaison n_1, n_2, n_3

	n_1	n_2	n_3
p1	69.583		
p2	63.833		
p3	81.500		
p4	54.500		
p5	41.250		
p6	52.750		
p7	70.083		
p8	68.333		
p9	39.167		
p10	60.333		
p11	80.333		
p12	62.917		
p13	56.583		
p14	67.750		
p15	43.583		
	$x_{n1} = 60.833$	$x_{n2} = 56.178$	$x_{n3} = 58.561$
	$s_{n1} = 12.987$	$s_{n2} = 13.847$	$s_{n3} = 11.269$
			secondes

- La moyenne des 15 observations pour chaque modalité n_1 , n_2 et n_3

$$x^{n_1} = 60.833, x^{n_2} = 56.178 \text{ et } x^{n_3} = 58.561$$

à partir desquelles on calcule la grandeur de l'effet observé de la comparaison définie en 2.1.1

$$s = \frac{(60.833 - 56.178)^2 + (60.833 - 58.561)^2 + (56.178 - 58.561)^2}{3} = 3.29 \text{ secondes}$$

- La moyenne quadratique des écarts-types-corrigés pour chaque modalité n_1 , n_2 et n_3

$$s = \frac{(12.99^2 + 13.85^2 + 11.27^2)}{3} = 12.75 \text{ secondes}$$

On a ici le lien suivant avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance:

$$cm_{n_1, n_2, n_3} = 975.52 = 90 \cdot 12 \quad (\text{ici } k = 90 = \frac{15 \times 12}{2})$$

$$cm_{P(N)} = 1949.50 = 12s^2$$

(12 est le nombre de traitements sur lesquels on a moyenné)

Les valeurs $l = 3.29$ et $s = 12.75$ vont servir de base pour l'analyse spécifique de la comparaison n_1, n_2, n_3 . Toutefois, si ces valeurs seront suffisantes pour la mise en oeuvre des procédures exposées ci-après, elles ne peuvent être considérées comme le résumé descriptif de l'analyse de la comparaison n_1, n_2, n_3 : en particulier à partir de la valeur $l = 3.29$, on ne peut pas reconstituer le tableau des différences entre les moyennes. Ce point sera repris plus loin.

Les temps moyens d'exécution pour les trois groupes d'étudiants diffèrent en moyenne entre eux de 3.29 secondes. Cette différence représente ici 26% de l'écart-type-corrigé intra-groupe ($s = 12.75$) et n'est donc pas négligeable; on observe donc, globalement, une hétérogénéité relativement importante des trois groupes d'étudiants. On remarquera que, si l'on souhaitait dépasser cette appréciation globale, il conviendrait de décomposer l'effet (ici à deux degrés de liberté); techniquement cela ramènerait au cas de l'analyse d'un contraste (ou, plus précisément ici, de deux contrastes), mais méthodologiquement cela imposerait le choix d'une décomposition de l'effet, nécessairement arbitraire dans le cas présent.

2.1.4 Analyse inductive

Le protocole dérivé pertinent est du même type que pour l'analyse de la comparaison n_1, n_2 (simplement, avec trois groupes au lieu de deux). Le point nouveau est que l'on s'intéresse ici à la *moyenne quadratique des différences* de moyennes entre groupes, et non plus à une différence de moyennes.

Ceci n'a aucune incidence sur le modèle et on pose, ici encore, le *modèle équilibré des groupes séparés*: à l'intérieur de chaque modalité n , on pose le modèle normal caractérisé par les paramètres μ^n (moyenne théorique pour la modalité n) et σ (écart-type théorique); la grandeur de l'effet théorique est définie comme la moyenne quadratique des différences:

$$\lambda = \frac{(\mu^{n_1} - \mu^{n_2})^2 + (\mu^{n_1} - \mu^{n_3})^2 + (\mu^{n_2} - \mu^{n_3})^2}{3}$$

Test de signification - On définit ici la statistique de test:

$$F = \frac{l^2}{bs^2}$$

avec, ici, $b = \frac{12}{90}$ et $m = 2$ et $q = (15-1) + (15-1) = 42$ degrés de liberté qui n'est autre que le rapport F usuel de l'analyse de la variance:

$$F = \frac{cm_{n_1, n_2, n_3}}{cm_{P(N)}} \quad (\text{avec } 2 \text{ et } 42 \text{ d.l.})$$

pour lequel on a ici la valeur observée

$$F_{\text{obs}} = 0.50$$

Procédures fiducio-bayésiennes - Les procédures fiducio-bayésiennes sont alors obtenues de manière immédiate en calculant:

$$e^2 = \frac{l^2}{mf_{\text{obs}}} = 3.29^2$$

On a alors les distributions fiducio-bayésiennes relatives aux paramètres λ et σ :

$$\lambda^* \sim 3.29\psi_{2, 42}(1.00) \quad (\text{de la forme } e\psi_{m, q}(mf_{\text{obs}}) \text{ ou } e\psi_{m, q}(\frac{l^2}{e^2}))$$

$$\sigma^* \sim 12.75\phi_{4, 2}^{-1} \quad (\text{de la forme } s\phi_q^{-1})$$

Ces distributions sont figurées dans la figure 1.

La situation illustrée ici est la même que celle rencontrée au chapitre précédent pour l'analyse de la comparaison (à un degré de liberté) n_1, n_2 . En

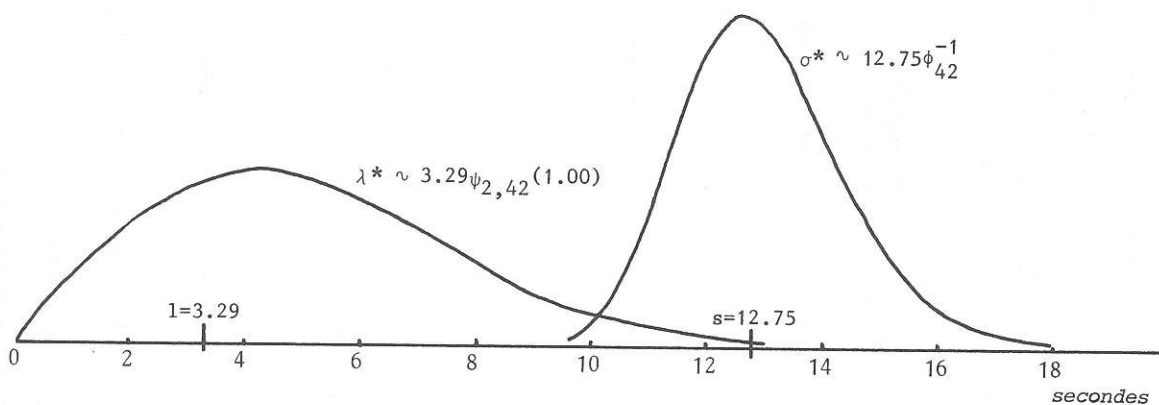


Figure 1 - Distributions fiducio-bayésiennes pour la comparaison n_1, n_2, n_3

dépôt d'un effet observé de grandeur notable, le résultat du test de signification est *non-significatif*, au seul observé $p = 0.61$ (calculé par programme), ce qui correspond à $P(F_{2,42} > F_{\text{obs}}) = P(F_{2,42} > 0.50) = 0.61$. Dans ce cas le seul test de signification suffit à indiquer que l'information expérimentale ne permet pas de prolonger la conclusion descriptive; ceci se traduit, bien entendu, dans les procédures fiducio-bayésiennes par le fait que la distribution relative à la grandeur de l'effet théorique λ est très dispersée (voir figure 1)

Comme pour les comparaisons à un degré de liberté, le lien entre les procédures fiducio-bayésiennes et l'information apportée par le test de signification peut être explicité, puisque, dans ce cas également, on peut donner une interprétation fiducio-bayésienne du seuil de signification observé; toutefois cette interprétation est moins immédiate pour une comparaison à plusieurs degrés de liberté, puisqu'elle nécessite l'introduction d'une notion supplémentaire, celle de "grandeur de l'écart relatif entre l'effet théorique et l'effet observé". Une bonne compréhension de cette notion nécessitera l'illustration préalable de la notion de *représentant de l'effet*.

2.1.5 Problème du choix d'un représentant de l'effet

Il doit être bien clair que la distribution relative à λ ne nous renseigne que sur la grandeur de l'effet et, à elle seule, ne saurait résumer l'information apportée par les données sur l'effet lui-même (surtout si celui-ci apparaît important). Par exemple, dans le cas présent, la même distribution - c'est-à-dire en fait la même valeur observée l - serait obtenue à partir des trois temps moyens observés 58.12, 58.62 et 62.38 (avec une même valeur de s), ou simplement 56.18, 58.56 et 60.83 (permutation des temps effectivement observés), etc.

Si l'on désire conserver l'information apportée par les données sur l'effet, en particulier pour pouvoir la comparer (et éventuellement la combiner) avec d'autres informations relatives à l'effet, il convient de se donner un *représentant de l'effet observé*. En pratique ici, la comparaison n_1, n_2, n_3 étant à deux degrés de liberté, cela revient à choisir deux contrastes, qu'il sera techniquement commode (même si, au départ, cela impose quelques problèmes d'ordre technique) de prendre orthogonaux et de norme $1/\sqrt{90}$, c'est-à-dire de manière générale $1/\sqrt{k}$.

- Le contraste sur N_3 de coefficients $(+1, -1, 0)$, correspondant à la comparaison n_1, n_2 , satisfait cette condition; puisqu'il y a 180 observations pour chaque modalité n ($180 = 15 \times 12$), il a en effet pour norme:

$$\left(\frac{(+1)^2}{180} + \frac{(-1)^2}{180} \right)^{\frac{1}{2}} = 1/\sqrt{90}$$

- Le contraste précédent est orthogonal à tout contraste de la forme $(+c, +c, -2c)$, correspondant à la comparaison n_1, n_2, n_3 ; un tel contraste a pour norme:

$$\left(\frac{c^2}{180} + \frac{c^2}{180} + \frac{4c^2}{180} \right)^{\frac{1}{2}} = c/\sqrt{30}$$

et, donc, pour $c = +1/\sqrt{3}$ (ou encore $c = -1/\sqrt{3}$), on obtient un contraste de norme $1/\sqrt{90}$.

L'effet observé associé au contraste $(+1, -1, 0)$ est $d_1 = 60.83 - 56.18 = +4.656$ secondes; l'effet observé associé au contraste $(+1/\sqrt{3}, +1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})$ est $d_2 = (60.83 + 56.18 - 2 \times 58.56)/\sqrt{3} = -0.064$ secondes. Le représentant de l'effet observé de la comparaison n_1, n_2 sera alors le vecteur:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} +4.656 \\ -0.064 \end{bmatrix} \text{ secondes}$$

La grandeur de l'effet observé 1 est simplement la moyenne quadratique des effets associés à chacun des deux contrastes considérés:

$$\|1\| = \left(\frac{\mathbf{d}'\mathbf{d}}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4.656^2 + (-0.064)^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 3.29 \text{ secondes}$$

On définirait de manière analogue, à partir des moyennes théoriques μ_1, μ_2 , le représentant de l'effet théorique, avec ses deux composantes: $\delta_1 = \mu_1 - \mu_2$ et $\delta_2 = (\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3)/\sqrt{3}$.

2.1.6 Interprétation fiducio-bayésienne du test F

Ecart entre l'effet théorique et l'effet observé - Nous pouvons maintenant définir le représentant de l'écart entre l'effet théorique et l'effet observé comme la différence:

$$\delta - \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \delta_1 - 4.656 \\ \delta_2 + 0.064 \end{bmatrix} \text{ secondes}$$

La grandeur de cet écart, notée ξ_d (où \mathbf{d} rappelle que l'écart est relatif à l'effet observé), est simplement la moyenne quadratique des différences entre l'effet théorique et l'effet observé associés à chacun des deux contrastes considérés:

$$\|\xi_d\| = \left(\frac{(\delta - \mathbf{d})'(\delta - \mathbf{d})}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(\delta_1 - 4.656)^2 + (\delta_2 + 0.064)^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Bien entendu cette grandeur ξ_d (de même que 1) ne dépend pas du représentant particulier de l'effet choisi (dans la classe des représentants caractérisée

par le choix de contrastes orthogonaux et de norme $1/\sqrt{k}$).

Réinterprétation fiducio-bayésienne du test F - La distribution fiducio-bayésienne relative à ξ_d peut être obtenue de manière immédiate:

$$\|\xi_d\| \sim 3.29 \psi_{2,42}(0) \quad (\text{de la forme } e^{\psi_{m,q}}(0))$$

On a encore, en utilisant la distribution du F, la distribution relative à ξ_d^2 :

$$\|\xi_d^2\| \sim 21.66 F_{2,42} \quad (\text{de la forme } m e^2 F_{m,q})$$

La probabilité fiducio-bayésienne que ξ_d soit supérieur à la grandeur de l'effet observé (soit ici $l = 3.29$) est égale à 0.61 (calculée par programme); cette probabilité n'est autre que le seuil de signification observé, noté p , du test F ($P(F_{m,q}^{obs} > F_{obs}) = p$). L'énoncé $P(\xi_d^2 < 3.29) = 0.39$, c'est-à-dire de manière générale $P(\xi_d^2 < l) = 1-p$, constitue la traduction fiducio-bayésienne du résultat du test F; il signifie que l'on a une probabilité 0.39 (de manière générale $1-p$) que, quel que soit le représentant de l'effet choisi, le représentant de l'effet théorique s'écarte "en moyenne" de moins de 3.29 secondes (de manière générale l) du représentant de l'effet observé.

On voit immédiatement que, dans le cas présent, cette réinterprétation du résultat non-significatif du test n'indique en aucune manière que l'effet peut être tenu, sinon pour nul, du moins pour négligeable.

Figuration des informations des procédures inductives - L'effet étant ici de dimension 2, nous pouvons recourir aux facilités offertes par la géométrie dans le plan pour illustrer les informations que nous apportent, d'une part le résultat du test de signification, et d'autre part l'inférence fiducio-bayésienne relative à la grandeur de l'effet théorique λ .

Dans la figure 2, nous avons figuré, dans un repère orthogonal, le représentant de l'effet observé \mathbf{d} . Un énoncé du type $P(\lambda^* < \epsilon)$ se traduit alors par la probabilité que le représentant de l'effet théorique δ soit situé à l'intérieur d'un cercle centré sur le point origine (ce cercle étant l'ensemble des points dont les coordonnées ont pour moyenne quadratique ϵ). De manière analogue, un énoncé du type $P(\xi_d^2 < \epsilon)$ se traduit par la probabilité que δ soit situé à l'intérieur d'un cercle, centré cette fois sur le point correspondant au représentant de l'effet observé \mathbf{d} ; en particulier, pour $\epsilon = 1$, il s'agit alors du cercle passant par le point origine.

Ainsi on peut voir dans la figure 2 les cercles traduisant les énoncés $P(\xi_d^2 < 3.29) = 0.39$, $P(\lambda^* < 1.9) = 0.10$ (soit encore $P(\lambda^* > 1.9) = 0.90$) et $P(\lambda^* < 8.7) = 0.90$ (énoncés obtenus par programme).

Ces considérations se généralisent bien entendu à des espaces de

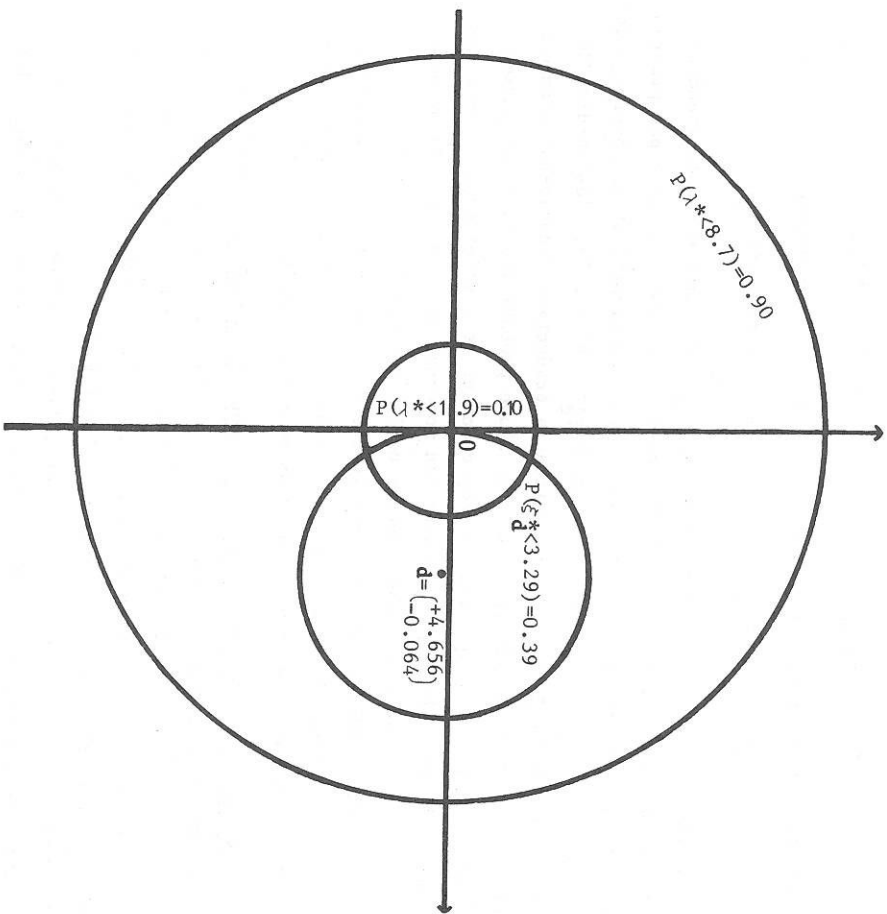


Figure 2 - Figuration des informations apportées par les procédures inductives: exemple de la comparaison n_1, n_2, n_3

dimension supérieure, les cercles étant remplacés par des sphères en dimension 3, et par des hypersphères en dimension supérieure à 3. Enfin, dans le cas particulier de la dimension 1 ($m=1$), l'énoncé $P(\lambda^* < \epsilon)$ se traduit par la probabilité que l'effet (numérique) théorique δ soit situé dans l'intervalle $[-\epsilon, +\epsilon]$ tandis que l'énoncé $P(\xi^* < 1)$ se traduit par la probabilité que δ soit situé dans l'intervalle de bornes 0 et $2d$ (dans ce cas $1 = |d|$ et $\lambda = |\delta|$).

2.1.7 Recherche d'une conclusion d'effet négligeable et recherche d'une conclusion d'effet notable pour une comparaison à plusieurs degrés de liberté

A la lumière des considérations précédentes, nous pouvons maintenant examiner la manière dont on peut envisager l'utilisation des procédures fiducio-bayésiennes pour l'analyse des comparaisons à plusieurs degrés de liberté. Comme pour les comparaisons à un degré de liberté, nous distinguerons les deux situations suivantes: recherche d'une conclusion d'effet négligeable et recherche d'une conclusion d'effet notable.

Recherche d'une conclusion d'effet négligeable - Une telle recherche revient à montrer que la grandeur de l'effet théorique λ peut être tenue pour négligeable et constitue donc une extension immédiate des procédures mises en oeuvre pour les comparaisons à un degré de liberté (il s'agissait alors de montrer que $|\delta|$ pouvait être tenu pour négligeable). Bien entendu ceci suppose préalablement que la grandeur de l'effet observé l apparaisse négligeable.

Dans cette situation, c'est la distribution fiducio-bayésienne relative à ξ_d à λ qui est *directement pertinente*; au contraire la distribution relative à ξ_d (et donc également le résultat du test de signification) n'apporte pas d'information directement utile (du moins indispensable) et peut donc même être purement et simplement ignorée.

La figure 2 peut permettre d'illustrer cette situation, si l'on veut bien imaginer maintenant qu'elle correspond à un autre contexte, dans lequel la valeur observée $l = 3.29$ serait cette fois tenue pour négligeable; partant de ce contexte, l'énoncé $P(\lambda^* < 8.7) = 0.90$ permettrait alors:

- soit de se prononcer en faveur d'un *effet théorique négligeable* si la limite 8.7 était encore tenue pour négligeable;
- soit de *suspendre le jugement inductif* si la limite 8.7 ne pouvait pas être tenue pour négligeable, ce qui signifierait alors que l'information expérimentale est insuffisante pour prolonger la conclusion descriptive d'un effet observé négligeable.

Plus précisément, dans cette situation, par delà l'énoncé particulier $P(\lambda^* < 8.7) = 0.90$, c'est la distribution fiducio-bayésienne relative à la

grandeur de l'effet théorique λ qui contient l'information pertinente pour rechercher une conclusion d'effet négligeable.

Recherche d'une conclusion d'effet notable - Cette situation est beaucoup plus délicate que la précédente, car elle soulève le problème de savoir ce que l'on entend par l'expression "effet notable" dans le cas d'un effet multidimensionnel.

Il nous paraît ici éclairant de revenir au cas de l'analyse des comparaisons à un seul degré de liberté. De manière implicite, nous avons, au chapitre précédent, entendu la recherche d'effet notable (ou important) d'un contraste comme signifiant la recherche d'une conclusion en faveur d'un *effet notable dans le sens de l'effet observé* d. Ainsi, si pour fixer les idées, d était positif, il s'agirait d'établir qu'avec une probabilité fiducio-bayésienne élevée l'effet théorique δ était supérieur à une valeur positive jugée notable. Comme on a pu le remarquer, une telle recherche, pour pouvoir aboutir, suppose (au moins implicitement) deux conditions préalables: 1) que l'effet observé d'apparaisse notable; 2) que l'on ait déjà une probabilité élevée que δ soit positif, ou plus généralement soit de même signe que d ("aille dans le même sens que d "). Comme nous l'avons vu, cette dernière condition peut encore s'exprimer en disant que le résultat du test de signification est *significatif*.

Il doit être bien clair que cette notion d'effet notable dans le sens de l'effet observé (ou, de manière plus générale, dans un sens donné) est la seule qui, dans ce cas d'un effet unidimensionnel, apparaisse pleinement satisfaisante et s'impose d'ailleurs de manière naturelle. Car, à l'évidence, la notion plus faible, d'effet notable dans l'absolu, qui reviendrait à établir qu'avec une probabilité élevée la grandeur de l'effet théorique (c 'est-à-dire ici $\lambda = |\delta|$) est supérieure à une valeur jugée notable, ne peut, à elle seule, apporter une information utile. C'est ainsi, à titre d'exemple, qu'un énoncé tel que $P(|\delta^*| > 5) = 0.90$, où 5 est une valeur jugée notable, réécrit sous la forme $P(\delta^* < -5) + P(\delta^* > +5) = 0.90$, peut parfaitement correspondre aux deux situations extrêmes suivantes:

$$1) P(\delta^* < -5) = 0.00001 \text{ et } P(\delta^* > +5) = 0.89999$$

$$2) P(\delta^* < -5) = P(\delta^* > +5) = 0.45$$

La première situation justifierait bien une conclusion en faveur d'un effet notable, dans le sens positif; mais la seconde situation ne pourrait, en tout état de cause qu'aboutir à un constat de grande incertitude sur la valeur de l'effet: en raison de la symétrie de la distribution relative à δ cette situation correspondrait à un effet observé nul ($d = 0$), donc ne pouvant en aucun cas conduire à une conclusion d'effet notable!

Toutefois, si un énoncé tel que $P(|\delta^*| > 5) = 0.90$ est insuffisant, il est non moins vrai qu'un tel énoncé peut devenir utile si on lui adjoint une information supplémentaire relative au sens de l'effet.

- Ainsi, si on lui ajoute l'énoncé $P(\delta^* > 0) = 0.99$, ou de manière équivalente si on précise que le résultat du test de signification est significatif au seuil observé unilatéral 0.01 (ce qui correspondrait à la première des deux situations envisagées ci-dessus), il devient alors légitime de conclure en faveur d'un effet notable dans le sens positif: de manière formelle, on peut déduire que l'on a une probabilité fiducio-bayésienne supérieure à 0.89 (0.90 - 0.01) que δ soit supérieur à +5.

- Au contraire, si on lui ajoute l'énoncé $P(\delta^* > 0) = P(\delta^* < 0) = 0.50$, ou de manière équivalente si on précise que le résultat du test de signification est non-significatif au seuil unilatéral 0.50 (ce qui correspondrait à la seconde situation), il devient alors manifeste que l'information expérimentale est insuffisante pour conclure.

Bien entendu le type de raisonnement précédent est indirect, et on ne va pas y recourir dans le cas d'une comparaison à un seul degré de liberté, puisque l'on dispose dans ce cas d'une solution directe.

En revanche, et c'est là où nous voulons en venir, c'est ce type de raisonnement que nous proposons d'étendre et d'utiliser pour la recherche d'une conclusion d'effet notable associé à une comparaison à plusieurs degrés de liberté. Pour cela on fera d'abord explicitement dépendre une telle recherche de deux conditions préalables impératives:

1) l'effet observé devra être de grandeur notable;

2) le résultat du test de signification devra être *significatif* ou, si on préfère, dans l'interprétation fiducio-bayésienne, la grandeur de l'écart entre l'effet théorique et l'effet observé ne devra pas, avec une probabilité élevée, excéder la grandeur de l'effet observé 1.

Si ces deux conditions sont remplies, on cherchera alors à établir que la grandeur de l'effet théorique λ est, avec une garantie fiducio-bayésienne suffisamment élevée, supérieure à une valeur jugée notable. Si cette recherche aboutit, on pourra conclure à un effet notable; sinon, de même que si le résultat du test de signification est non-significatif, on admettra que l'information expérimentale est insuffisante pour prolonger inductivement la conclusion descriptive d'un effet notable.

Illustration des différentes situations pour la recherche d'une conclusion d'effet notable - Nous allons maintenant illustrer les différentes situations possibles. La situation d'un effet observé notable, mais d'un résultat

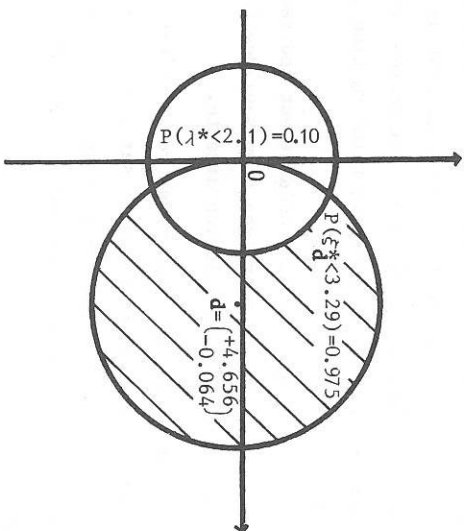


Figure 3 - Figuration des informations apportées par les procédures inductives: exemple fictif

non-significatif, est celle que nous avons précisément rencontrée dans l'analyse de la comparaison n_1, n_2, n_3 . Il apparaît bien, à l'examen de la figure 2, que l'on ne peut pas, dans ce cas, aboutir à une conclusion sur l'importance de l'effet: manifestement un énoncé tel que $P(\lambda^* > 1.9) = 0.90$ ne constitue dans ce cas qu'un constat d'ignorance (même si 1.9 est une valeur jugée notable), puisque l'on est ici très incertain sur la position relative de l'effet théorique par rapport à l'effet observé, comme l'indique la traduction fiducio-bayésienne du résultat non-significatif: $P(\xi^* < 3.29) = 0.39$.

La situation d'un effet observé notable et d'un résultat significatif du test est illustrée dans la figure 3. Cette figure correspond à l'exemple fictif dans lequel, pour la comparaison n_1, n_2, n_3 , on aurait obtenu, pour la même grandeur de l'effet observé $l = 3.29$ secondes, un écart-type-corrigé intra-groupe $s = 4.48$ (au lieu de 12.75). Dans ce cas, pour $F_{obs} = 4.05$, le résultat du test de signification serait *significatif* au seuil observé $p = 0.025$, soit encore $P(\xi^* < 3.29) = 0.975$. On aurait cette fois $P(\lambda^* > 2.1) = 0.90$; la limite 2.1 secondes apparaissant être une valeur notable (notamment égale à 47% de l'écart-type-corrigé intra-groupe $s = 4.48$), on voit, à l'examen de la figure 3, que l'on peut raisonnablement dans ce cas conclure à un effet notable: en particulier la probabilité fiducio-bayésienne que δ soit situé dans la partie hachurée est supérieure à 0.875 (0.975 - 0.10).

Enfin, dans la situation toujours fictive où la limite 2.1 n'aurait pas été considérée comme une valeur notable, on n'aurait évidemment pas pu conclure, pour cette même figure 3, à un effet notable.

Remarques supplémentaires sur la recherche et l'interprétation d'une conclusion d'effet notable - Telle est donc l'utilisation des procédures fiducio-bayésiennes que nous proposons pour la recherche d'une conclusion d'effet notable associé à une comparaison à plusieurs degrés de liberté. Cette utilisation présente à nos yeux le double avantage de faire le lien avec la procédure largement répandue que constitue le test F (mais en la prolongeant) et de reposer sur des procédures de caractère standard. Cette utilisation n'est certainement pas exempte de toute critique; mais il faut bien être conscient du fait, qu'à partir du moment où l'on ne souhaite pas introduire explicitement une *décomposition* particulière d'un effet multidimensionnel, toute conclusion visant à établir que cet effet est notable aura un caractère *global* et, par suite, nécessairement *incomplet*. Il convient par conséquent de garder une attitude réaliste vis-à-vis de la portée, nécessairement *limitée*, d'une telle conclusion et, par voie de conséquence, on pourra admettre qu'il n'est sans doute pas utile de chercher à raffiner les procédures utilisées pour obtenir cette conclusion.

C'est pourquoi nous ne ferons qu'évoquer ici d'autres procédures qui pourraient être mises en oeuvre. En particulier, on pourrait effectuer une inférence sur l'importance de ξ_d , en utilisant la distribution du ψ centré (ou, simplement, par l'intermédiaire de la distribution du F); par exemple, on pourrait ainsi chercher à conclure que l'effet théorique est "proche" (en un sens à préciser) de l'effet observé: à titre d'illustration, sur la figure 3, cela reviendrait à attribuer une probabilité fiduciaire-bayésienne à un cercle centré sur d , de rayon suffisamment "petit". De manière plus générale, on pourrait d'ailleurs encore attribuer une probabilité à n importe quel cercle (de centre quelconque), en utilisant la distribution du ψ (non-centré) et, par suite, envisager d'en déduire, au moins de manière approchée, la probabilité correspondant à n importe quelle région du plan, etc.

2.1.8 Mise en oeuvre pratique de l'inférence fiduciaire-bayésienne pour une comparaison à plusieurs degrés de liberté

Comme nous l'avons illustré, pour l'obtention des distributions fiduciaire-bayésiennes relatives aux paramètres λ et σ (et éventuellement à ξ_d), le choix d'un représentant de l'effet reste facultatif. On étend en fait au cas de plusieurs degrés de liberté la propriété essentielle utilisée pour l'inférence sur un contraste: une fois effectuée l'analyse descriptive, le seul intermédiaire de calcul nécessaire à la mise en oeuvre des procédures fiduciaire-bayésiennes est le rapport F qui conduit au test de signification approprié à la comparaison analysée; il est ici encore immédiat d'en déduire les distributions fiduciaire-bayésiennes (exception faite du cas où l'effet observé serait nul).

Seulement ici, la distribution relative à la grandeur de l'effet théorique λ , la distribution du ψ , nécessitera le recours à un programme informatique, réalisable sur un petit ordinateur ou sur une calculatrice programmable suffisamment puissante; en effet il ne serait guère économique, sinon envisageable, de tabuler de manière détaillée cette distribution.

* 2.2 ANALYSE DE LA COMPARAISON $c_1, c_2, n_1, n_2, n_3/e_1$

Par rapport à la structure $A \times G \times T$, la comparaison $c_1, c_2, n_1, n_2, n_3/e_1$ est du type V, W ; on se trouve ici dans le cas particulier $dl(W) = 2$ et $dl(W) = 1$, mais l'exemple a valeur générale pour la classe de comparaisons de ce type telles que $dl(W) = 1$ (le cas général où $dl(W)$ est quelconque sera examiné dans la section 4).

2.2.1 Caractérisation de la grandeur de l'effet observé

L'effet observé associé à la comparaison à un degré de liberté $c_1, c_2/e_1$ a été caractérisé comme la différence entre les temps moyens d'exécution au premier essai dans la condition c_1 et dans la condition c_2 ; cette différence vaut respectivement, pour chacun des trois groupes d'étudiants, $d^{n_1} = +32.27$, $d^{n_2} = +29.00$ et $d^{n_3} = +30.47$. On caractérisera numériquement la grandeur de l'effet observé associé à la comparaison d'interaction (à deux degrés de liberté) $c_1, c_2, n_1, n_2, n_3/e_1$ à partir des valeurs absolues des différences entre ces différences prises deux à deux:

$$\begin{aligned} |32.27 - 29.00| &= 3.27 \\ |32.27 - 30.47| &= 1.80 \\ |29.00 - 30.47| &= 1.47 \end{aligned}$$

Ces différences de différences, ordonnées, valent donc 1.47, 1.80 et 3.27 et on peut prendre comme indicateur de la grandeur de l'effet observé associé à la comparaison $c_1, c_2, n_1, n_2, n_3/e_1$ leur moyenne quadratique, soit:

$$\left| 1 = \frac{(3.27^2 + 1.80^2 + 1.47^2)^{\frac{1}{2}}}{3} = 2.31 \text{ secondes} \right.$$

2.2.2 Recherche d'un protocole dérivé pertinent

Comme pour l'analyse de la comparaison $c_1, c_2, n_1, n_2/e_1$ le protocole dérivé pertinent est le protocole des effets observés pour chaque paire de sujets. Ce protocole, présenté dans le tableau 2, constitue les données de base pour l'analyse spécifique de la comparaison $c_1, c_2, n_1, n_2, n_3/e_1$; bien que la comparaison analysée soit à deux degrés de liberté, il s'agit encore ici d'un protocole numérique, ceci parce que la comparaison $c_1, c_2/e_1$ (pour W) a un seul degré de liberté.

2.2.3 Analyse descriptive

Pour résumer le protocole numérique précédent, on considérera les statistiques suivantes:

- Les moyennes $d^{n_1} = +32.27$, $d^{n_2} = +29.00$ et $d^{n_3} = +30.47$ à partir desquelles on calcule la grandeur de l'effet observé de la comparaison défini en

2.2.1

$$\left| 1 = 2.31 \text{ secondes} \right.$$

n_1, n_2 et n_3

- la moyenne quadratique des écarts-types-corrigés pour chaque modalité

$$\left| s = \frac{(31.73^2 + 32.08^2 + 30.89^2)^{\frac{1}{2}}}{3} = 31.57 \text{ secondes} \right.$$

Tableau 2 - Protocole dérivé pertinent pour la comparaison c1, c2, n1, n2, n3/e1

	n_1	n_2	n_3
p1	+ 48	+ 34	+ 14
p2	+ 18	+ 39	+ 11
p3	+120	+ 54	+ 16
p4	- 6	+ 38	+107
p5	+ 10	- 1	+ 28
p6	+ 22	+ 1	+ 20
p7	+ 62	+ 18	+ 38
p8	- 1	+ 33	+ 42
p9	+ 55	- 62	+ 34
p10	+ 4	+ 40	+ 49
p11	+ 43	+ 65	- 17
p12	+ 22	+ 59	+ 63
p13	+ 43	+ 16	- 5
p14	+ 18	+ 45	+ 55
p15	+ 26	+ 56	+ 2
<hr/>			
	$d^{n1} = +32.267$	$d^{n2} = +29.000$	$d^{n3} = +30.467$
	$s_{n1} = 31.734$	$s_{n2} = 32.076$	$s_{n3} = 30.891$
secondes			

On a ici le lien suivant avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance:

$$cm_{c1, c2, n1, n2, n3/e1} = 20.08 = 3.751^2$$

$$(ici k = 3.75 = \frac{1}{2} \frac{15}{(+1)^2 + (-1)^2})$$

$$cm_P(N).c1, c2/e1 = 498.36 = \frac{1}{2} s^2$$

(ici 2 = $(+1)^2 + (-1)^2$ comme pour la comparaison c1, c2/e1)

Les valeurs l = 2.31 et s = 31.57 vont servir de base pour l'analyse spécifique de la comparaison c1, c2, n1, n2, n3/e1. Le gain moyen obtenu au premier essai par l'observation d'un sujet effectuant la tâche ("effet d'apprentissage incident") diffère en moyenne, d'une catégorie d'étudiants à l'autre, d'environ deux secondes et demie; ceci représente 8% du gain moyen calculé sur l'ensemble des étudiants (30.58 secondes: effet associé à la comparaison c1, c2/e1) et, relativement à ce critère, peut être tenu pour assez faible; on parvient à la même appréciation si l'on rapporte la grandeur de l'effet l = 2.31 à la valeur de s, soit ici $\frac{l}{s} = 0.07$.

2.2.4 Analyse inductive

On procède de la même manière que pour la comparaison n1, n2, n3, puisque, bien qu'il s'agisse de deux types différents de comparaisons, le protocole dérivé pertinent est du même type. On pose le modèle *équinoxial des groupes séparés*: à l'intérieur de chaque modalité n, on pose le modèle normal caractérisé par les paramètres δ^n (ici: effet théorique associé à la comparaison à un degré de liberté c1, c2/e1 pour la modalité n) et σ ; la grandeur de l'effet théorique est définie comme la moyenne quadratique des différences:

$$\lambda = \left[\frac{(\delta^{n1} - \delta^{n2})^2 + (\delta^{n1} - \delta^{n3})^2 + (\delta^{n2} - \delta^{n3})^2}{3} \right]^{\frac{1}{2}}$$

On obtient cette fois:
- pour le test de signification

$$F_{obs} = \frac{1^2}{bs^2} = \frac{cm_{c1, c2, n1, n2, n3/e1}}{cm_P(N).c1, c2/e1} = 0.040$$

avec, ici, $b = \frac{1/2}{3.75} = \frac{2}{15}$ et $m = 2$ et $q = 42$ degrés de liberté

- pour les procédures fiducio-bayésiennes

$$e^2 = \frac{1^2}{mF_{obs}} = 8.15^2$$

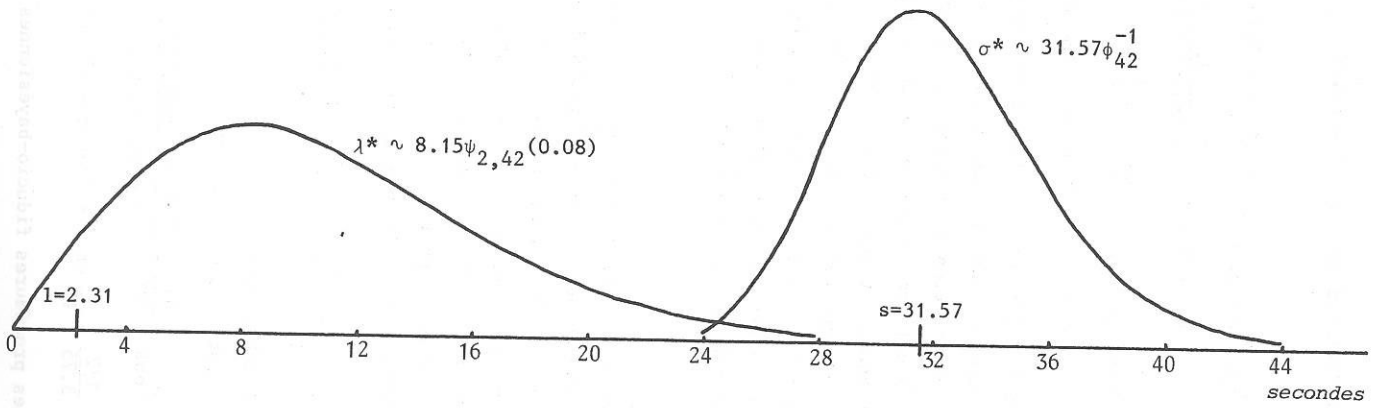


Figure 4 - Distributions fiducio-bayésiennes pour la comparaison $c_1, c_2, n_1, n_2, n_3 / e_1$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda &\sim 8.15\psi_{2,42}(0.08) \\ \sigma &\sim 31.57\phi_{42}^{-1} \end{aligned}$$

Ces distributions sont figurées dans la figure 4.

On en déduit les énoncés fiducio-bayésiens

$$\begin{aligned} P(\lambda < 18.3) &= 0.90 \text{ (obtenu par programme)} \\ P(\sigma > 27.8) &= 0.90 \text{ et } P(\sigma < 36.9) = 0.90 \end{aligned}$$

La conclusion descriptive d'un effet faible ne peut à l'évidence être prolongée au niveau inductif, en dépit du résultat non-significatif du test de signification: la limite supérieure obtenue pour λ (18.3 secondes) ne saurait en aucun cas être tenue pour faible.

* * *

3 INFERENCE RELATIVE AU RAPPORT δ/σ OU AU RAPPORT λ/σ

Dans l'analyse descriptive des comparaisons, on rapporte souvent l'effet observé d ou la grandeur de cet effet l à une quantité s , homogène à un écart-type-corrigé.

Par exemple, dans l'analyse de la comparaison n_1, n_2 , nous avons rapporté l'effet observé (la différence des deux moyennes) à l'écart-type-corrigé intra-groupe des temps moyens observés pour chaque paire de sujets; dans ce cas le rapport d/s fournit un critère d'appréciation de l'importance de l'effet observé. Il en va de même du rapport l/s dans l'analyse de la comparaison (à deux degrés de liberté) n_1, n_2, n_3 .

Dans le cas d'une comparaison $W/G1$ (par exemple la comparaison $e1, e6/c1$), le rapport d/s (ou l/s) peut également servir à caractériser la distribution des effets individuels. Ainsi, d étant la moyenne des effets observés de chaque sujet et s étant leur écart-type-corrigé (éventuellement moyenné sur les groupes g appartenant à $G1$), un rapport d/s élevé pourra traduire le fait que la majorité des sujets ont un effet observé important, ou au moins allant dans le même sens que l'effet moyen d (dans ce cas, on utilisera bien entendu d'autres critères pour juger de l'importance de d).

Il se pose alors naturellement le problème de l'inférence sur le paramètre correspondant, δ/σ dans le cas de l'effet d'un contraste ou λ/σ dans le cas de la grandeur de l'effet d'une comparaison à un nombre quelconque de degrés de liberté. La dérivation des distributions fiducio-bayésiennes relatives à ces paramètres est encore immédiate; simplement l'exploitation de ces distributions nécessitera l'utilisation d'un programme.

* 3.1 INFERENCE FIDUCIO-BAYÉSIENNE RELATIVE AU RAPPORT δ/σ

3.1.1 Comparaison $e1, e6/c1$

Reprenons, à titre d'illustration, l'exemple de l'analyse de la comparaison $e1, e6/c1$. On a dans ce cas:

- pour l'analyse descriptive

$$d = +10.95 \text{ et } s = 5.46, \text{ soit } \frac{d}{s} = +2.005$$

- pour l'analyse inductive

$$F_{\text{Obs}} = 120.65 \text{ et } e^2 = 1.00^2 \text{ (avec } q = 28 \text{ d.l.)}$$

La distribution fiducio-bayésienne relative au rapport δ/σ s'en déduit de manière immédiate:

$$\left\| \frac{\delta^*}{\sigma} \sim L'_{28} \left(+2.01, 0.18^2 \right) \quad \left(\text{de la forme } L'_q \left(\frac{d}{s}, F_{\text{Obs}} \right) \text{ ou } L'_q \left(\frac{d}{s}, \frac{e^2}{s^2} \right) \right)$$

Cette distribution est figurée dans la figure 5.

On obtient par programme l'énoncé fiducio-bayésien:

$$P \left(\frac{\delta^*}{\sigma} > +1.59 \right) = 0.90$$

La distribution relative au rapport δ/σ permet ici d'apprécier la variabilité de l'effet, δ et σ étant respectivement la moyenne et l'écart-type (intra-groupe) de la "population" des effets (en gardant à l'esprit le fait que la variabilité inter-individuelle et la variabilité intra-individuelle sont ici confondues).

On peut donc effectivement prolonger au niveau inductif les conclusions énoncées au niveau descriptif: 1) il est bien établi que l'effet moyen est important (conclusion obtenue précédemment à partir de la distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre δ); 2) il est également bien établi que l'effet est important dans la plupart des cas (on a la garantie fiducio-bayésienne 0.90 que le rapport δ/σ est supérieur à 1.59); à titre indicatif, pour une distribution normale dont la moyenne (positive) est 1.59 fois plus grande que l'écart-type, une proportion 0.94 des valeurs de la variable sont positives et une proportion 0.88 des valeurs de la variable sont supérieures au quart de la moyenne.

(L'expression dans la plupart des cas que nous utilisons ici prend en compte le fait que l'on ne peut pas "séparer" la variabilité inter-individuelle de la variabilité intra-individuelle; c'est pourquoi une expression telle que pour la plupart des sujets ne serait pas satisfaisante ici)

3.1.2 Comparaison $n1, n2$

Considérons encore, à titre d'illustration, l'exemple de la comparaison $n1, n2$. On a dans ce cas:

- pour l'analyse descriptive

$$d = +4.66 \text{ et } s = 13.42, \text{ soit } \frac{d}{s} = +0.347$$

- pour l'analyse inductive

$$F_{\text{Obs}} = 0.90 \text{ et } e^2 = 4.90^2 \text{ (avec } q = 28 \text{ d.l.)}$$

dont on déduit

$$\left\| \frac{\delta^*}{\sigma} \sim L'_{28} \left(+0.35, 0.37^2 \right)$$

Cette distribution est figurée dans la figure 6.

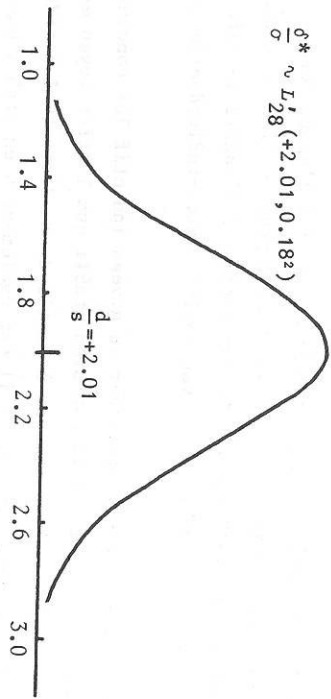


Figure 5 - Distribution fiducio-bayésienne relative au rapport δ/σ : exemple de la comparaison e1,e6/c1

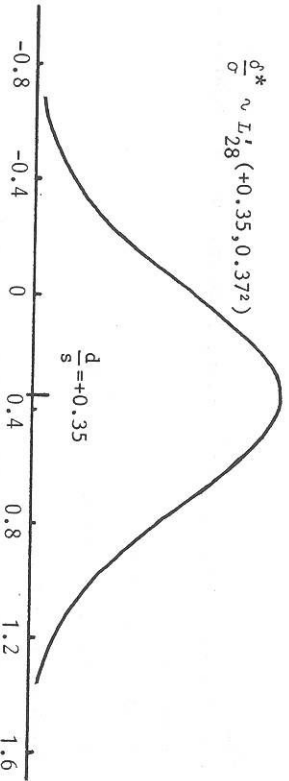


Figure 6 - Distribution fiducio-bayésienne relative au rapport δ/σ : exemple de la comparaison n1,n2

On obtient par programme l'énoncé fiducio-bayésien:

$$P(|\frac{\delta^*}{\sigma}| < 0.83) = 0.90$$

La distribution relative au rapport δ/σ permet ici d'apprécier l'importance de l'effet δ , en rapportant celui-ci à l'écart-type théorique intra-groupe; dans le cas présent, on ne peut évidemment que retrouver le constat précédent selon lequel l'information expérimentale est ici insuffisante pour conclure.

* 3.2 INFERENCE FIDUCIO-BAYESIENNE RELATIVE AU RAPPORT λ/σ

3.2.1 Comparaison n1,n2,n3

Considérons, à titre d'illustration, la comparaison n1,n2,n3; on a dans

ce cas:

- pour l'analyse descriptive

$$I = 3.29 \text{ et } s = 12.75, \text{ soit } \frac{1}{s} = 0.254$$

- pour l'analyse inductive

$$F_{\text{obs}} = 0.50 \text{ et } e^2 = 3.29^2 \text{ (avec } m = 2 \text{ et } q = 42 \text{ d.l.)}$$

La distribution fiducio-bayésienne relative au rapport λ/σ s'en déduit de manière immédiate:

$$\lambda^* \sim 0.26L_{2,42}(1.00) \quad (\text{de la forme } \frac{e}{s}L_{m,q}(mF_{\text{obs}}) \text{ ou } \frac{e}{s}L_{m,q}(\frac{1}{e^2}))$$

Cette distribution est figurée dans la figure 7.

On obtient par programme l'énoncé fiducio-bayésien:

$$P(\lambda^* < 0.68) = 0.90$$

La distribution fiducio-bayésienne relative au rapport λ/σ permet ici d'apprécier l'importance de l'effet, en rapportant la grandeur théorique λ de celui-ci à l'écart-type théorique intra-groupe; la situation est identique à celle rencontrée pour la comparaison n1,n2, l'information expérimentale étant insuffisante pour conclure.

3.2.2 Comparaison c1,c2,n1,n2,n3/e1

Dans le cas de la comparaison c1,c2,n1,n2,n3/e1, on a:

- pour l'analyse descriptive

$$I = 3.21 \text{ et } s = 31.57, \text{ soit } \frac{1}{s} = 0.073$$

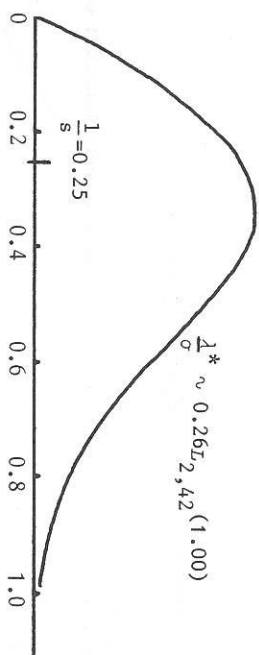


Figure 7 - Distribution fiducio-bayésienne relative au rapport λ/s :
exemple de la comparaison n_1, n_2, n_3

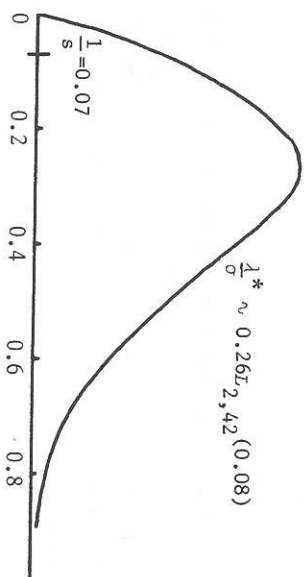


Figure 8 - Distribution fiducio-bayésienne relative au rapport λ/s :
exemple de la comparaison $c_1, c_2, n_1, n_2, n_3/e_1$

- pour l'analyse inductive

$$F_{\text{obs}} = 0.040 \text{ et } e^2 = 8.15^2 \text{ (avec } m = 2 \text{ et } q = 42 \text{ d.l.)}$$

dont on déduit

$$\left\| \frac{\lambda}{\sigma} \right\| \sim 0.267_{2,42} (0.08)$$

Cette distribution est figurée dans la figure 8.

On obtient par programme l'énoncé fiducio-bayésien:

$$P\left(\frac{\lambda}{\sigma} < 0.57\right) = 0.90$$

On ne peut pas, dans ce cas non plus, obtenir de conclusion inductive satisfaisante, en dépit de la valeur observée faible du rapport l/s (0.07) et du résultat non-significatif du test de signification.

* *

4 UNE AUTRE PLANIFICATION POSSIBLE DES ANALYSES SPECIFIQUES

Même dans des cas simples, la *planification des analyses spécifiques* pourra ne pas aller de soi, et devra en tout état de cause relever de choix raisonnés. Ainsi, dans l'expérience d'apprentissage perceptif incident, d'autres choix sont possibles. En particulier, pour analyser l'effet d'apprentissage dans la condition c1, nous avons précédemment retenu la comparaison à un degré de liberté e1, e6/c1. Ce choix conduit à caractériser numériquement l'effet d'apprentissage par la différence entre le temps d'exécution au premier essai et le temps d'exécution au sixième essai, divisée par cinq (nombre d'essais pour obtenir cet effet); formellement il s'agit là de l'effet associé au contraste sur E₆ (conditionnellement à c1) de coefficients (+1/5, 0, 0, 0, -1/5). Cette caractérisation présente manifestement un caractère *incomplet*, puisqu'elle est fondée sur seulement deux essais sur six. On voit néanmoins immédiatement sa supériorité par rapport à un indicateur de la grandeur de l'effet qu'on associerait à la comparaison à cinq degrés de liberté e1, e2, e3, e4, e5, e6, comme cela a été fait précédemment pour la comparaison n1, n2, n3: tout indicateur de ce type ferait jouer un rôle *symétrique* aux six essais et serait inadaptable par conséquent pour traduire l'effet d'apprentissage (il n'indiquerait même pas si cet effet est "positif" ou "négatif").

Un autre choix intéressant consiste à caractériser numériquement l'effet d'apprentissage par la *pente de la droite de régression* ajustée aux six temps d'exécution pour chaque essai; cette caractérisation représente la modification de la performance par essai, lorsque l'on remplace les six temps d'exécution par leur approximation *linéaire*, et l'effet ainsi défini est effectivement fondé sur les six temps considérés. Ce choix est obtenu en remplaçant, dans la planification des analyses spécifiques, la comparaison e1, e6 par la comparaison, également à un degré de liberté, notée LIN E (ou LIN E₆). On obtient alors cette autre planification des analyses spécifiques (toutes les comparaisons étant encore à un degré de liberté):

LIN E/c1
c1, c2/e1
LIN E.c1, c2
n1, n2
n1, n2, LIN E/c1
c1, c2.n1, n2/e1
c1, c2.n1, n2, LIN E

Nous analyserons, à titre d'illustration, les comparaisons LIN E/c1 et

n1, n2, LIN E/c1; ceci fournira de nouveaux exemples d'analyses de comparaisons à un degré de liberté, respectivement de types W/G1 et W.W.

A titre de complément nous analyserons encore la comparaison résiduelle, à quatre degrés de liberté, notée

$$\parallel E-LIN E/c1$$

qui permet de juger l'acceptabilité de l'ajustement linéaire, ainsi que les comparaisons d'interaction

$$\parallel n1, n2.E-LIN E/c1$$

et, en reprenant le cas des trois groupes d'étudiants,

$$\parallel n1, n2, n3.E-LIN E/c1$$

Ceci fournira des exemples d'analyses de comparaisons à plusieurs degrés de liberté, respectivement des types W/G1, W.W (avec d(W) = 1) et W.W (cas général). Nous illustrerons de nouveau, à cette occasion le problème du choix d'un représentant de l'effet.

* 4.1 ANALYSE DE LA COMPARAISON LIN E/c1

La comparaison LIN E/c1 est une comparaison à un degré de liberté du type W/G1 (avec G1 = G).

4.1.1 Caractérisation de l'effet observé

Les temps moyens d'exécution observés pour chacun des six essais sont respectivement 99.10, 77.70, 70.37, 58.47, 51.33 et 44.37 secondes; la pente de la droite de régression ajustée à ces six moyennes vaut -10.42 secondes. Il s'agit maintenant de déterminer le contraste sur E tel que l'effet associé à ce contraste soit précisément cette pente.

De manière plus générale, le problème se ramène formellement à la donnée d'un protocole $x^j = (x^j_1, \dots, x^j_J)$ de support équilibré J = {1, 2, ..., J}. La pente de la droite de régression de x^j en J est donnée par $\text{cov}(J, x^j) / \text{var}(J)$ et on cherche donc un contraste $(c_j)_j$ dont l'effet d soit tel que:

$$d = \frac{\sum_j c_j x^j = \text{cov}(J, x^j)}{\text{var}(J)}$$

On a (le support J étant équilibré):

$$\text{var}(J) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J j^2 - \left(\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J j \right)^2 = \frac{J^2-1}{12}$$

$$\text{cov}(J, x^J) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J jx^j - \frac{J+1}{2} \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (j - \frac{J+1}{2}) x^j$$

On obtient par conséquent :

$$\sum_{j=1}^J c_j x^j = \sum_{j=1}^J \frac{12}{J(J^2-1)} (j - \frac{J+1}{2}) x^j$$

dont on déduit les coefficients du contraste

$$c_j = \frac{6(2j-J-1)}{J(J^2-1)}$$

Dans le cas présent, pour J=6, on a $c_j = (2j-7)/35$, d'où le contraste sur E_6 de coefficients $(-5/35, -3/35, -1/35, +1/35, +3/35, +5/35)$.

Pour des raisons de commodité, nous choisirons ici le contraste opposé $(+5/35, +3/35, +1/35, -1/35, -3/35, -5/35)$, de sorte que l'effet d soit positif (comme précédemment l'effet observé de la comparaison e1, e6/c1), et donc puisse être interprété comme une diminution moyenne par essai du temps d'exécution. L'effet observé associé à la comparaison LIN E/c1, ou plus exactement au contraste choisi pour la représenter sera donc :

$$d = \frac{+5 \times 99.10 + 3 \times 77.70 + 1 \times 70.37 - 1 \times 58.47 - 3 \times 51.33 - 5 \times 44.37}{35} = +10.42 \text{ secondes}$$

4.1.2 Résumé de l'analyse

L'analyse est bien entendu analogue à celle de la comparaison e1, e6/c1 et sera simplement résumée.

Le protocole pertinent des effets individuels (pour chaque sujet, pente de la droite de régression affectée du signe opposé) est présenté dans le tableau 3.

Analyse descriptive - Le protocole pertinent est résumé par :

$$d = \frac{+9.45 + 11.39}{2} = +10.42 \text{ secondes}$$

$$s = \left(\frac{6.55^2 + 3.99^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 5.42 \text{ secondes}$$

(au lieu de d = +10.95 et s = 5.46 pour la comparaison e1, e6/c1)

avec ici

$$\text{cm LIN E/c1} = 56992.19 = 525d^2$$

$$\frac{1}{525} = \frac{(+5/35)^2 + (+3/35)^2 + (+1/35)^2 + (-1/35)^2 + (-3/35)^2 + (-5/35)^2}{15+15}$$

Tableau 3 - Protocole dérivé pertinent pour la comparaison LIN E/c1

	n1	n2	
p1	+12.571	p16	+11.686
p2	+10.971	p17	+10.714
p3	+29.857	p18	+ 8.571
p4	+ 7.400	p19	+13.114
p5	+ 4.286	p20	+10.943
p6	+12.119	p21	+ 8.943
p7	+ 7.743	p22	+ 6.429
p8	+ 8.200	p23	+10.714
p9	+ 9.314	p24	+ 8.229
p10	+ 1.429	p25	+ 5.943
p11	+ 2.571	p26	+19.400
p12	+ 5.629	p27	+18.400
p13	+11.086	p28	+16.486
p14	+ 9.057	p29	+10.229
p15	+ 9.371	p30	+11.057
$d^{n1} = +9.448$		$d^{n2} = +11.390$	
$s_{n1} = 6.550$		$s_{n2} = 3.992$	
		secondes	

$$c_{MP}^{CM}(N).LIN E/c1 = 514.88 = 17.5s^2$$

$$\left(\frac{1}{17.5}\right) = (+5/35)^2 + (3/35)^2 + (+1/35)^2 + (-1/35)^2 + (-3/35)^2 + (-5/35)^2$$

(Ici le rapprochement avec la comparaison e1,e6/c1 fait apparaître que les valeurs des carrés-moyens, contrairement à celles de d et s, sont assez nettement différentes, ce qui illustre encore l'incapacité des statistiques usuelles de l'analyse de la variance à servir directement d'indicateur de la grandeur des effets observés)

Analyse inductive - On a pour les procédures inférentielles:

$$t_{obs} = \frac{d}{\sqrt{bs}} = +10.52$$

avec, ici, $b = 1/((15+15))$ et $q = 28$ degrés de liberté, comme pour la comparaison e1,e6/c1

$$\left\| F_{obs} = t_{obs}^2 = \frac{c_{MP}^{CM}.LIN E/c1}{c_{MP}^{CM}(N).LIN E/c1} = 110.69 \text{ (avec 1 et 18 d.l.)} \right\|$$

$$e^2 = \frac{d^2}{F_{obs}} = 0.982$$

d'où

$$\left\| \begin{array}{l} \delta^* \sim t_{28} (+10.42, 0.982) \\ \sigma^* \sim 5.42\phi_{28}^{-1} \\ \frac{\delta^*}{\sigma^*} \sim L'_{28} (+1.92, 0.182) \end{array} \right\|$$

On en déduit les énoncés fiduciaire-bayésiens

$$P(\delta^* > +9.1) = 0.90$$

$$P(\sigma^* < 6.6) = 0.90$$

$$P\left(\frac{\delta^*}{\sigma^*} > +1.5\right) = 0.90 \text{ (obtenu par programme)}$$

Les résultats sont tout à fait comparables à ceux obtenus pour l'analyse de la comparaison e1,e6/c1; on en tire donc tout à fait les mêmes conclusions.

(On remarquera qu'en ce qui concerne la mise en oeuvre pratique la détermination du contraste dominant la pente de la droite de régression peut être totalement évitée, dans la mesure où l'on dispose d'une autre procédure pour calculer cette pente; d'un point de vue pratique, ce contraste n'est en fait indispensable que pour expliciter le lien entre d et s et les carrés-moyens)

* 4.2 ANALYSE DE LA COMPARAISON n1,n2.LIN E/c1

L'analyse s'effectue comme pour la comparaison e1,e6.n1,n2/c1 et sera brièvement résumée.

Le protocole dérivé pertinent est le même que pour la comparaison

LIN E/c1 (tableau 3); mais ici l'effet observé du contraste est la différence

$$\left\| d = +9.45 - (+11.39) = -1.94 \text{ secondes} \right\|$$

(au lieu de $d = -2.16$ pour la comparaison e1,e6.n1,n2/c1)

et on a toujours

$$\left\| s = 5.42 \text{ secondes} \right\|$$

avec ici

$$c_{MP}^{CM} n1,n2.LIN E/c1 = 495.43 = 131.25d^2$$

$$c_{MP}^{CM}(N).LIN E/c1 = 514.88 = 17.5s^2$$

On a pour les procédures inférentielles:

$$t_{obs} = \frac{d}{\sqrt{bs}} = -0.98$$

avec, ici, $b = \frac{2}{15}$, comme pour la comparaison e1,e6.n1,n2/c1, et $q = 28$ degrés de liberté

$$\left\| F_{obs} = t_{obs}^2 = \frac{c_{MP}^{CM} n1,n2.LIN E/c1}{c_{MP}^{CM}(N).LIN E/c1} = 0.96 \text{ (avec 1 et 28 d.l.)} \right\|$$

$$e^2 = \frac{d^2}{F_{obs}} = 1.982$$

d'où notamment

$$\left\| \delta^* \sim t_{28} (-1.94, 1.982) \right\|$$

dont on déduit les énoncés fiduciaire-bayésiens

$$P(\delta^* < 0) = 0.832 \text{ (obtenu par programme)}$$

$$P(|\delta^*| < 4.6) = 0.90$$

Ici encore les résultats sont absolument analogues à ceux obtenus pour l'analyse de la comparaison e1,e6.n1,n2/c1.

* 4.3 ANALYSE DE LA COMPARAISON E-LIN E/c1

Par rapport à la structure $\underline{A} < G > * T$, la comparaison E-LIN E/c1 est du type $\underline{W}/G1$; on se trouve ici dans le cas particulier $(d1(W)) = 4$ et $G1 = G$, mais l'exemple a valeur générale.

4.3.1 Caractérisation de la grandeur de l'effet observé

La comparaison LIN E/c1 a conduit à caractériser la modification de la performance par essai lorsque l'on remplace les données (les six temps

d'exécution) par l'approximation linéaire; la comparaison E-LIN E/c1 (résiduelle de la comparaison LIN E/c1 par rapport à la comparaison E/c1) permet d'étudier la qualité de cette approximation linéaire: celle-ci peut-elle être considérée comme un modèle acceptable? Il s'agit donc ici de caractériser numériquement l'écart entre les données et les valeurs correspondant au modèle linéaire.

Nous retiendrons la solution suivante. Si nous voulions caractériser cet écart pour un seul essai, nous prendrions naturellement la différence entre la valeur observée et la valeur correspondant à la droite de régression. Ainsi, ici, les moyennes observées pour chacun des six essais (dans la condition c1) sont respectivement: 99.10, 77.70, 70.37, 58.47, 51.33 et 44.37 secondes. La droite de régression a pour équation $x = -10.42r + 103.36$, où r est le rang de l'essai (variant de 1 à 6); -10.42 est la pente de la droite calculée précédemment et 100.36 est déterminé par la propriété selon laquelle la droite passe par le point moyen de coordonnées $r = 3.5$ (rang moyen des essais) et $x = 66.89$ (temps moyen d'exécution). En faisant varier r de 1 à 6, on obtient alors les valeurs correspondant à la droite de régression pour chacun des six essais: 92.94, 82.52, 72.10, 61.68, 51.26 et 40.84. On peut alors, pour chaque essai, calculer l'écart entre cette valeur et la valeur observée:

$$\begin{array}{cccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 \\ -6.16 & +4.82 & +1.73 & +3.21 & -0.07 & -3.53 \end{array}$$

Ces écarts, en valeur absolue, sont compris entre 0.07 et 6.16 et, sur l'ensemble des essais, il apparaît raisonnable de prendre comme indicateur de la grandeur de l'effet observé associé à la comparaison E-LIN E/c1 leur moyenne quadratique:

$$\sqrt{\frac{1}{6} (6.16^2 + 4.82^2 + 1.73^2 + 3.21^2 + 0.07^2 + 3.53^2)} = 3.81 \text{ secondes}$$

4.3.2 Grandeur des effets individuels

Pour une comparaison du type W/G1 l'effet observé peut être défini pour chaque paire de sujets, même ici pour chaque sujet puisque l'on se limite à la condition c1. La caractérisation précédente de la grandeur de l'effet s'applique par conséquent, non seulement à l'effet de groupe, mais encore aux effets individuels. Pour cela, on calcule pour chaque sujet et pour chaque essai la différence entre la valeur donnée par la droite ajustée aux données de ce sujet et la valeur observée; ces différences sont données dans le tableau 4. Pour chaque essai, à l'intérieur de chaque modalité n1 et n2, on considère la moyenne et l'écart-type-corrige des différences pour les sujets correspondants;

Tableau 4 - Comparaison E-LIN E/c1: caractérisation de la grandeur des effets individuels

	Essai						Moyenne quadratique
	e1	e2	e3	e4	e5	e6	
n1	p1 -15.57	+13.86	+1.29	+11.71	-4.86	-6.43	*10.31*
	p2 -15.57	+9.46	+10.49	+3.51	+1.54	-9.43	*9.53*
	p3 +13.81	-10.05	-31.90	+29.24	+8.38	-9.48	*19.68*
	p4 -14.33	+1.27	+13.87	+10.47	+4.07	-15.33	*11.26*
	p5 -2.62	+1.10	+0.81	+5.52	+4.76	-0.05	*3.21*
	p6 -20.76	+12.01	+20.78	+2.55	-11.68	-2.90	*13.89*
	p7 -10.81	+11.45	+4.70	+4.96	-15.78	+5.48	*9.78*
	p8 -7.33	+5.47	+6.27	+3.93	+3.87	-4.33	*5.36*
	p9 -12.05	+4.64	+12.32	+2.01	+0.70	-7.62	*7.97*
	p10 -4.90	+0.19	+0.38	-8.05	+0.48	+5.10	*4.12*
	p11 +3.24	+16.52	-44.05	+36.38	+17.81	-21.76	*26.93*
	p12 +5.90	+0.28	-16.35	+11.01	-3.61	+2.76	*8.61*
	p13 -4.95	+3.96	+3.12	+8.79	+0.70	-5.38	*5.11*
	p14 -2.19	+3.75	+0.70	+2.36	-1.42	+1.52	*2.21*
	p15 -17.24	+13.39	+9.02	+4.65	-3.72	-6.10	*10.25*
Moyenne	-7.03	+5.79	-0.99	+7.77	-0.62	-4.93	$\sqrt{n1} = 5.305$
Ecart-type-corrige	9.60	7.02	17.43	11.66	7.92	7.47	$s_{n1} = 10.800$
	Essai						
	e1	e2	e3	e4	e5	e6	Moyenne quadratique
n2	p16 -10.95	+5.36	+5.68	+6.99	+2.30	-9.38	*7.34*
	p17 -0.05	-10.76	+20.52	-11.19	+4.10	-2.62	*10.69*
	p18 -13.57	+16.86	-8.71	+11.71	+3.14	-9.43	*11.40*
	p19 -12.38	+10.50	+4.39	+2.28	+2.16	-6.95	*7.54*
	p20 -0.81	-7.75	+8.30	+5.36	+0.58	-4.52	*5.47*
	p21 -0.81	-1.75	+2.30	+0.36	+3.42	-3.52	*2.36*
	p22 -3.76	-1.19	+10.38	-2.05	-3.48	+0.10	*4.82*
	p23 -1.71	+14.57	+4.86	-38.86	+13.42	+7.71	*18.21*
	p24 -0.76	-1.99	+4.78	-1.45	+0.32	-0.90	*2.25*
	p25 -0.48	-9.42	+14.64	+0.70	-5.25	-0.19	*7.43*
	p26 -17.33	+17.27	-0.13	+9.47	-0.93	-8.33	*11.24*
	p27 -5.00	+2.60	+5.20	+5.80	-12.60	+4.00	*10.66*
	p28 -10.29	+19.23	-12.26	+3.26	+4.77	-4.71	*16.67*
	p29 -4.43	-4.66	+8.11	+7.89	+0.66	-7.57	*6.15*
	p30 +2.81	+8.75	-1.30	-20.36	-4.42	+14.52	*11.04*
Moyenne	-5.30	+3.84	+4.45	-1.34	+0.47	-2.12	$\sqrt{n2} = 3.396$
Ecart-type-corrige	6.06	10.21	8.19	13.22	5.78	6.73	$s_{n2} = 8.770$
	Essai						
	e1	e2	e3	e4	e5	e6	Moyenne quadratique
Moyenne générale	-6.16	+4.82	+1.73	+3.21	-0.07	-3.53	$\sqrt{1} = 3.807$

puis, pour prendre en compte l'ensemble des six essais, on retient la moyenne quadratique (sur les essais) de ces moyennes et de ces écarts-types-corrigés, d'où les valeurs l^n et s_n (voir tableau 4) pour chaque modalité n . l^n est la caractérisation de la grandeur de l'effet observé pour la modalité n . Par ailleurs, pour chaque sujet, la moyenne quadratique des différences obtenues pour chacun des six essais caractérise la grandeur de l'effet observé pour ce sujet.

4.3.3 Choix d'un représentant de l'effet observé

La comparaison E-LIN E/c1 ayant quatre degrés de liberté, l'effet observé est de dimension 4 et doit donc être représenté au moyen de quatre contrastes. Le choix de ces quatre contrastes présentera nécessairement un caractère arbitraire, puisqu'il correspondra à une décomposition de l'effet que l'on n'a pas souhaitée dans la planification des analyses spécifiques. Bien entendu les procédures ne dépendront pas du choix particulier qui sera effectué, et les critères de choix seront essentiellement d'ordre technique. Comme précédemment pour la comparaison n_1, n_2, n_3 , on choisira quatre contrastes orthogonaux et de même norme, tels que la grandeur de l'effet observé l définie ci-dessus soit la moyenne quadratique des effets observés associés à chacun de ces contrastes.

Pour une comparaison telle que E-LIN E, des contrastes orthogonaux sont fournis par les coefficients des *polynômes orthogonaux*, qu'on trouvera par exemple dans Fisher et Yates (1963); on obtient ainsi les quatre contrastes de coefficients respectifs:

$$\begin{aligned} & (+5, -1, -4, -4, -1, +5) \\ & (-5, +7, +4, -4, -7, +5) \\ & (+1, -3, +2, +2, -3, +1) \\ & (-1, +5, -10, +10, -5, +1) \end{aligned}$$

Pour chaque essai, pour la condition c_1 , on a 30 observations; par conséquent les quatre contrastes précédents ont pour normes respectives (égales à la racine carrée de la somme des carrés des coefficients divisés par 30):

$$\begin{aligned} \sqrt{84/30} &= \sqrt{14/5} \\ \sqrt{180/30} &= \sqrt{6} \\ \sqrt{28/30} &= \sqrt{14/15} \\ \sqrt{252/30} &= \sqrt{42/5} \end{aligned}$$

La norme de chaque contraste doit en fait être choisie égale à la valeur $1/\sqrt{k}$ définie par la relation $cm_{E-LIN E/c1} = k l^2$; on a ici:

$$cm_{E-LIN E/c1} = 652.13 = 45 l^2$$

et, par conséquent, $k = 45 = 6(15+15)/4$, où 6 est le nombre d'essais, 4 est le nombre de degrés de liberté de la comparaison E-LIN E/c1 et 15 est le nombre de paires de sujets à l'intérieur de chacune des deux modalités n_1 et n_2 . Pour obtenir quatre contrastes de norme $1/\sqrt{k} = 1/\sqrt{45}$, il faut diviser les coefficients de chacun des contrastes précédents par sa norme (d'où des contrastes de norme unifiée), puis multiplier par $1/\sqrt{45}$; ceci revient à diviser les coefficients de chaque contraste, respectivement par $\sqrt{126}$, $\sqrt{270}$, $\sqrt{42}$ et $\sqrt{378}$.

Les effets observés associés à chacun des quatre contrastes ainsi obtenus sont respectivement:

$$\begin{aligned} d_1 &= (+5 \times 99.10 - 1 \times 77.70 - 4 \times 70.37 - 4 \times 58.47 - 1 \times 51.33 + 5 \times 44.37) / \sqrt{126} = +6.500 \\ d_2 &= (-5 \times 99.10 + 7 \times 77.70 + 4 \times 70.37 - 4 \times 58.47 - 7 \times 51.33 + 5 \times 44.37) / \sqrt{270} = -2.526 \\ d_3 &= (+1 \times 99.10 - 3 \times 77.70 + 2 \times 70.37 + 2 \times 58.47 - 3 \times 51.33 + 1 \times 44.37) / \sqrt{42} = +2.165 \\ d_4 &= (-1 \times 99.10 + 5 \times 77.70 - 10 \times 70.37 + 10 \times 58.47 - 5 \times 51.33 + 1 \times 44.37) / \sqrt{378} = -2.155 \end{aligned}$$

Le représentant de l'effet observé associé à la comparaison E-LIN E/c1 est par conséquent le vecteur:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} +6.500 \\ -2.526 \\ +2.165 \\ -2.155 \end{pmatrix} \text{ secondes}$$

qui est tel que

$$l = \left(\frac{\mathbf{d}'\mathbf{d}}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{6.500^2 + 2.526^2 + 2.165^2 + 2.155^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = 3.81 \text{ secondes}$$

4.3.4 Recherche d'un protocole dérivé pertinent

Ici encore l'effet observé peut être défini pour chaque sujet, et on peut calculer, pour chaque sujet, le représentant de l'effet observé. On prendra donc comme protocole dérivé pertinent pour l'analyse de la comparaison E-LIN E/c1 le protocole dérivé des représentants des effets observés individuels. Ce protocole est fourni dans le tableau 5; on voit comment il permet de retrouver les grandeurs des effets individuels, ainsi que les quantités l^{n_1} , l^{n_2} , s_{n_1} et s_{n_2} , définies précédemment.

On remarquera dès à présent que, puisque ce sont précisément ces quantités qui sont suffisantes pour les procédures inférentielles (test de signification et procédures fiducio-bayésiennes), il ne sera pas en pratique nécessaire pour la mise en oeuvre de ces procédures de calculer le protocole dérivé pertinent, mais il suffira de calculer les grandeurs des effets individuels.

Tableau 5 - Protocole dérivé pertinent pour la comparaison E-LIN E/c1

		Représentant de l'effet				Moyenne quadratique	
Ecart-type-corrigé	n1	p1	+15.23	- 8.22	+ 3.55	-10.65	* 10.31*
		p2	+17.10	- 6.94	+ 4.63	+ 1.23	* 9.53*
		p3	- 3.03	+29.82	- 0.62	-25.51	* 19.68*
		p4	+22.36	+ 0.67	- 0.46	+ 2.52	* 11.26*
		p5	+ 3.12	- 2.13	- 3.24	- 4.06	* 3.21*
		p6	+18.87	-19.96	- 3.39	+ 2.37	* 13.89*
		p7	+ 5.43	-16.49	- 4.17	- 7.97	* 9.78*
		p8	+ 6.86	- 4.08	+ 5.40	+ 4.68	* 5.36*
		p9	+14.34	- 5.54	+ 1.08	+ 4.06	* 7.97*
		p10	- 6.50	- 2.74	+ 0.77	+ 4.17	* 4.12*
		p11	+12.20	+25.26	+22.37	-40.17	*26.93*
		p12	- 6.06	+ 5.96	- 1.23	-14.92	* 8.61*
		p13	+ 7.04	+ 1.64	+ 2.01	- 6.94	* 5.11*
		p14	- 0.09	- 4.08	+ 1.70	+ 0.05	* 2.21*
		p15	+16.12	-11.75	+ 3.86	- 2.73	*10.25*
Moyenne	+ 8.20	- 1.24	+ 2.15	- 6.26	l _{n1} = 5.305		
Ecart-type-corrigé	9.30	13.48	6.32	12.59	s _{n1} = 10.800		
		Représentant de l'effet				Moyenne quadratique	
Ecart-type-corrigé	n2	p16	+14.25	- 1.46	+ 2.78	- 1.54	* 7.34*
		p17	+ 3.92	- 0.61	- 5.55	+20.27	*10.69*
		p18	+13.10	- 2.13	+11.88	-14.25	*11.40*
		p19	+12.12	- 5.72	+ 6.79	- 1.34	* 7.54*
		p20	+ 6.50	+ 3.47	- 7.25	+ 3.55	* 5.47*
		p21	+ 3.03	+ 2.56	+ 0.62	+ 2.47	* 2.36*
		p22	+ 4.19	- 5.17	- 4.17	+ 5.61	* 4.82*
		p23	-12.29	-14.00	+22.53	+21.71	*18.21*
		p24	+ 1.78	- 0.49	- 1.54	+ 3.81	* 2.25*
		p25	+ 4.45	- 1.70	-11.42	+ 8.23	* 7.43*
		p26	+16.21	- 8.16	+ 8.64	-10.08	*11.24*
		p27	+ 3.46	- 9.07	- 7.87	- 4.68	* 6.67*
		p28	+ 5.61	- 4.08	+16.20	-11.98	*10.66*
		p29	+10.69	+ 3.16	- 4.94	+ 1.65	* 6.15*
		p30	-15.06	-13.81	+ 6.02	+ 5.81	*11.04*
Moyenne	+ 4.80	- 3.81	+ 2.18	+ 1.95	l _{n2} = 3.396		
Ecart-type-corrigé	8.79	5.56	9.73	10.24	s _{n2} = 8.770		
Moyenne générale		Représentant de l'effet		Moyenne quadratique			
+ 6.50		- 2.53 + 2.17 - 2.16		I = 3.807			

secondes

Par rapport aux situations rencontrées jusqu'à présent, le point nouveau est que le protocole dérivé pertinent est un protocole multinumérique, et non plus numérique: à chaque paire de sujet (en fait à chaque sujet), sont associés les quatre effets individuels des contrastes choisis pour représenter la comparaison E-LIN E/c1. Pour cette situation nouvelle, on étendra les solutions précédentes, de manière assez naturelle, tant dans l'analyse descriptive que dans l'analyse inductive.

4.3.5 Analyse descriptive

Statistiques pour l'analyse de la comparaison E-LIN E/c1 - Pour résumer le protocole multinumérique précédent (cf tableau 5), on considérera les statistiques suivantes:

- Les moyennes des représentants des effets individuels à l'intérieur de chacune des deux modalités n1 et n2

$$d^{n1} = \begin{bmatrix} +8.20 \\ -1.24 \\ +2.15 \\ -6.26 \end{bmatrix} \text{ et } d^{n2} = \begin{bmatrix} +4.80 \\ -3.81 \\ +2.18 \\ +1.95 \end{bmatrix}$$

à partir desquelles on calcule, d'une part le représentant de l'effet observé de la comparaison défini en 4.3.3

$$d = \frac{d^{n1} + d^{n2}}{2} = \begin{bmatrix} +6.50 \\ -2.53 \\ +2.17 \\ -2.16 \end{bmatrix} \text{ secondes}$$

et d'autre part la grandeur de l'effet observé, définie en 4.3.1

$$|| I = \left(\frac{d' d}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = 3.81 \text{ secondes}$$

- la moyenne quadratique des quantités sⁿ¹ et sⁿ²

$$|| s = \left(\frac{10.800^2 + 8.770^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 9.84 \text{ secondes}$$

On a ici le lien suivant avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance:

$$cm_{E-LIN E/c1}^2 = 4512 \text{ (cf 4.3.3)}$$

$$cm_{p(N)}^2 . E-LIN E/c1 = 145.16 = 1.5s^2$$

$$\text{(ici } \frac{1}{1.5} = \frac{1}{45} (15+15))$$

Remarques et commentaires - Il faut insister ici sur le fait que la grandeur de l'effet "moyen" observé l n'est pas la moyenne des grandeurs des effets individuels l^p ; ainsi, dans le cas présent, 26 sujets sur 30 ont une valeur l^p supérieure à la valeur $l = 3.81$. De la même manière, l n'est pas la moyenne des grandeurs de l'effet observé à l'intérieur de chacun des deux groupes de sujets, l^{n1} et l^{n2} .

Plus précisément, on a ici les relations:

- à l'intérieur de chaque modalité n

$$\text{Moy}(l^{p\langle n \rangle^2}) = \frac{1}{15} \sum_{p\langle n \rangle \in P\langle n \rangle} l^{p\langle n \rangle^2} = l^{n^2} + \frac{14}{15} s^2$$

$$\text{soit } l^n = \left(\text{Moy}(l^{p\langle n \rangle^2}) - \frac{14}{15} s^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\left(\frac{14}{15} s^2\right)$ est une quantité homogène à une variance non-corrigée)

- sur l'ensemble des deux modalités $n1$ et $n2$

$$\text{Moy}(l^{n^2}) = \frac{l^{n1^2} + l^{n2^2}}{2} = l^2 + \frac{cm_{n1, n2, E-LIN E/c1}}{45}$$

$$\text{soit } l = \left(\text{Moy}(l^{n^2}) - \frac{1}{45} cm_{n1, n2, E-LIN E/c1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, au niveau descriptif, le fait que la valeur l soit (éventuellement) jugée négligeable ne pourrait même pas, à lui seul, constituer un argument en faveur de l'acceptabilité du modèle linéaire: ce dernier ne pourrait être acceptable que si à la fois l , s et encore l'effet associé à la comparaison d'interaction $n1, n2, E-LIN E/c1$ étaient tenus pour négligeables. Ce n'est évidemment pas le cas ici: les valeurs $l = 3.81$ secondes et surtout $s = 9.84$ secondes ne sauraient en aucun cas être tenues pour négligeables; on peut au contraire dire ici que l'ajustement linéaire, en tant que modèle descriptif, est inacceptable.

4.3.6 Analyse inductive

On généralisera les procédures mises en oeuvre précédemment pour les protocoles numériques, en posant, pour le protocole multinumérique pertinent le modèle multinormal (et non plus normal) des groupes séparés: à l'intérieur de chaque modalité n , on pose le modèle multinormal caractérisé par les paramètres δ^n (représentant de l'effet théorique de la comparaison pour la modalité n) et σ (écart-type théorique), la matrice de variances et covariances étant supposée de la forme $\sigma^2 I_q$ (donc ne dépendant que du seul paramètre

numérique σ). Le représentant de l'effet théorique δ est défini, de manière analogue à d comme la moyenne $\delta = (\delta^{n1} + \delta^{n2})/2$, et la grandeur de l'effet théorique, de manière analogue à l , comme $\lambda = (\delta^2 \delta / 2)^{\frac{1}{2}}$.

Sous ce modèle, on obtient alors les procédures inférentielles:

- pour le test de signification

$$F_{\text{obs}} = \frac{l^2}{bs^2} = \frac{cm_{E-LIN E/c1}}{cm_P(N) \cdot E-LIN E/c1} = 4.49$$

avec, ici, $b = 1/(15+15) = 1/30$ et $m = 4$ et $q = 28 \times 4 = 112$ degrés de liberté

- pour les procédures fiducio-bayésiennes

$$e^2 = \frac{l^2}{m F_{\text{obs}}} = 0.902$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda^* &\sim 0.90^{1/4} \sim 0.97 \\ \sigma^* &\sim 9.84 \phi_{112}^{-1} \end{aligned}$$

Ces distributions sont figurées dans la figure 9.

On en déduit les énoncés fiducio-bayésiens

$$\begin{aligned} P(\lambda^* > 3.0) &= 0.90 \text{ (obtenu par programme)} \\ P(\sigma^* > 9.1) &= 0.90 \end{aligned}$$

Au delà du résultat significatif (au seuil observé $p = 0.002$) du test de signification, on peut ici conclure au niveau inductif à l'acceptabilité de l'ajustement linéaire, les limites inférieures obtenues pour λ (3.0 secondes) et surtout σ (9.1 secondes) correspondant à un écart important.

*4.4 ANALYSE DE LA COMPARAISON $n1, n2, E-LIN E/c1$

Par rapport à la structure $\Delta \langle G \rangle^* T$, la comparaison $n1, n2, E-LIN E/c1$ est du type $V \Delta M$; l'exemple a ici valeur générale pour la classe de comparaisons de ce type telles que $d1(N) = 1$.

4.4.1 Caractérisation de la grandeur de l'effet observé

Il s'agit de comparer l'écart entre les données et le modèle linéaire observé pour la modalité $n1$ à l'écart observé pour la modalité $n2$. Pour chacun des six essais, nous avons précédemment caractérisé cet écart (cf 4.3.1) par la différence entre la valeur correspondant à la droite de régression et la valeur observée; cette différence a été calculée pour chacune des modalités

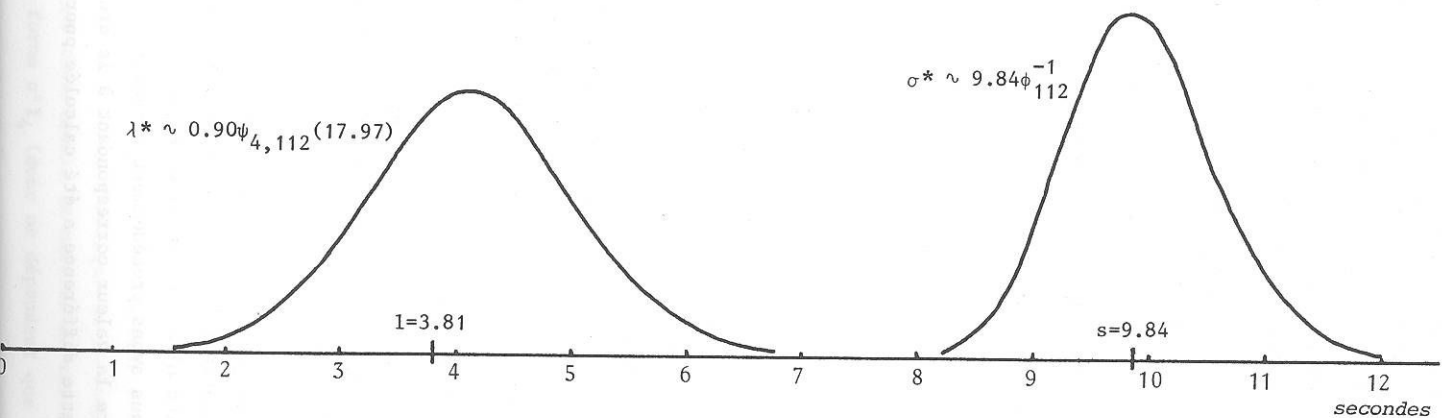


Figure 9 - Distributions fiducio-bayésiennes pour la comparaison E-LIN E/c1

n1 et n2 (cf tableau 4), d'où les valeurs:

	$\frac{e1}{n1}$	$\frac{e2}{n1}$	$\frac{e3}{n1}$	$\frac{e4}{n1}$	$\frac{e5}{n1}$	$\frac{e6}{n1}$
n1	-7.03	+5.79	-0.99	+7.77	-0.62	-4.93
n2	-5.30	+3.84	+4.45	-1.34	+0.47	-2.12

Pour comparer ces écarts pour un essai donné, on prendrait naturellement la différence entre les deux valeurs obtenues pour n1 et n2, d'où pour chacun des essais la différence:

$\frac{e1}{n1}$	$\frac{e2}{n2}$	$\frac{e3}{n2}$	$\frac{e4}{n2}$	$\frac{e5}{n2}$	$\frac{e6}{n2}$
-1.72	+1.95	-5.44	+9.11	-1.09	-2.81

Sur l'ensemble des essais, il apparaît raisonnable de prendre comme indicateur de la grandeur de l'effet observé associé à la comparaison d'interaction n1, n2, E-LIN E/c1 la moyenne quadratique de ces six différences entre les écarts, soit:

$$I = \left\{ \frac{1.72^2 + 1.95^2 + 5.44^2 + 9.11^2 + 1.09^2 + 2.81^2}{6} \right\}^{\frac{1}{2}} = 4.62 \text{ secondes}$$

4.4.2 Recherche d'un protocole dérivé pertinent

Le protocole dérivé pertinent est bien entendu le même que pour la comparaison E-LIN E/c1.

4.4.3 Analyse descriptive

Pour résumer le protocole multinumérique précédent, on considérera comme en 4.3.5:

- les moyennes

$$d^{n1} = \begin{bmatrix} +8.20 \\ -1.24 \\ +2.15 \\ -6.26 \end{bmatrix} \text{ et } d^{n2} = \begin{bmatrix} +4.80 \\ -3.81 \\ +2.18 \\ +1.95 \end{bmatrix}$$

à partir desquelles on calcule, d'une part le représentant de l'effet observé de la comparaison n1, n2, E-LIN E/c1

$$d = d^{n1} - d^{n2} = \begin{bmatrix} +8.20 - 4.80 \\ -1.24 + 3.81 \\ +2.15 - 2.18 \\ -6.26 - 1.95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3.40 \\ +2.58 \\ -0.03 \\ -8.21 \end{bmatrix}$$

et d'autre part la grandeur de l'effet observé définie en 4.4.1

$$I = \left(\frac{d^t d}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3.40^2 + 2.58^2 + 0.03^2 + 8.21^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = 4.62 \text{ secondes}$$

- La moyenne quadratique (cf 4.3.5)

$$s = 9.84 \text{ secondes}$$

On a ici le lien suivant avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance:

$$cm_{n1, n2, E-LIN E/c1} = 240.61 = 11.251^2$$

$$\text{(ici } k = 11.25 = h / \left(\frac{(+1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} \right))$$

$$cm_P(N).E-LIN E/c1 = 145.16 = 1.5s^2$$

$$\text{(ici } h = 1.5, \text{ cf 4.3.5)}$$

L'effet observé associé à la comparaison $n1, n2, E-LIN E/c1$ apparaît relativement important: l'ajustement linéaire est, pour les données de groupe, "moins mauvais" pour les étudiants en mathématiques de 4.6 secondes en moyenne par essai.

4.4.4 Analyse inductive

Comme pour la comparaison $E-LIN E/c1$, on pose le modèle *multinomial* des groupes séparés, avec les mêmes paramètres, mais ici le représentant de l'effet théorique est défini comme la différence $\delta = \delta^{n1} - \delta^{n2}$, à partir de laquelle on caractérise la grandeur de l'effet théorique comme $\lambda = (\delta^{n1} \delta^{n2})^{\frac{1}{2}}$.

On obtient alors pour le test de signification:

$$F_{obs} = \frac{1^2}{bs^2} = \frac{cm_{n1, n2, E-LIN E/c1}}{cm_P(N).E-LIN E/c1} = 1.66$$

avec, ici $b = \frac{h}{k} = 2/15$ et avec $m = 4$ et $q = 112$ degrés de liberté

Dans ce cas, le résultat non-significatif du test de signification (au seuil observé $p = 0.164$, calculé par programme) fait qu'il n'est pas possible de prolonger inductivement la conclusion descriptive d'un effet important.

* 4.5 ANALYSE DE LA COMPARAISON $n1, n2, n3, E-LIN E/c1$

La comparaison $n1, n2, n3, E-LIN E/c1$ fournit un exemple d'analyse d'une comparaison du type W, W , dans le cas le plus général où $d1(W)$ et $d2(W)$ sont tous les deux supérieurs à 1.

4.5.1 Caractérisation de la grandeur de l'effet observé

Pour la modalité $n3$ les temps moyens observés pour chacun des six essais

(dans la condition $c1$) sont respectivement: 93.067, 74.867, 66.800, 61.400, 54.200 et 46.133 secondes. En procédant comme pour la comparaison précédente $n1, n2, E-LIN E/c1$, les écarts entre la valeur correspondant à la droite de régression et la valeur observée, cette fois pour chacune des trois modalités $n1, n2$ et $n3$, sont les suivants:

	$e1$	$e2$	$e3$	$e4$	$e5$	$e6$
$n1$	-7.03	+5.79	-0.99	+7.77	-0.62	-4.93
$n2$	-5.30	+3.84	+4.45	-1.34	+0.47	-2.12
$n3$	-5.41	+4.16	+3.59	+0.36	-1.07	-1.63

Dans ce cas on prendra, pour chacun des six essais, la moyenne quadratique des différences entre les trois écarts correspondants, pris deux à deux; par exemple pour $e1$:

$$\left(\frac{(-7.03+5.30)^2 + (-7.03+5.41)^2 + (-5.30+5.41)^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.36$$

On obtient ainsi les six valeurs:

$e1$	$e2$	$e3$	$e4$	$e5$	$e6$
1.36	1.46	4.13	6.85	1.12	2.52

Sur l'ensemble des essais, on retiendra finalement, comme indicateur de la grandeur de l'effet observé associé à la comparaison (à $2 \times 4 = 8$ degrés de liberté) $n1, n2, n3, E-LIN E/c1$, la moyenne quadratique des six valeurs précédentes, soit:

$$1 = \left(\frac{1.36^2 + 1.46^2 + 4.13^2 + 6.85^2 + 1.12^2 + 2.52^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} = 3.55 \text{ secondes}$$

4.5.2 Analyse descriptive

Le protocole dérivé pertinent est, comme pour la comparaison précédente $n1, n2, E-LIN E/c1$, le protocole multinomérique des représentants des effets individuels associés à la comparaison $E-LIN E/c1$ (on ajoute ici les données relatives à $n3$). Pour résumer ce protocole (non reproduit ici), on considérera:

- les moyennes

$$d^{n1} = \begin{bmatrix} +8.20 \\ -1.24 \\ +2.15 \\ -6.26 \end{bmatrix}, \quad d^{n2} = \begin{bmatrix} +4.80 \\ -3.81 \\ +2.18 \\ +1.95 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d^{n3} = \begin{bmatrix} +4.82 \\ -4.16 \\ +1.30 \\ +0.12 \end{bmatrix}$$

qui permettent de définir le représentant de l'effet observé de la comparaison $n1, n2, n3, E-LIN E/c1$, en utilisant, comme pour la comparaison $n1, n2, n3$, les deux contrastes sur N_3 de coefficients respectifs $(+1, -1, 0)$ (correspondant à

La comparaison n_1, n_2 et $(+1/\sqrt{3}, +1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})$ (correspondant à la comparaison n_1, n_2, n_3), d'où respectivement pour chacun de ces deux contrastes

$$d_1 = d^{n_1} - d^{n_2} = \begin{bmatrix} +3.40 \\ -2.58 \\ -0.03 \\ -8.21 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{d^{n_1} + d^{n_2} - 2d^{n_3}}{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} +1.94 \\ +1.89 \\ +1.00 \\ -2.63 \end{bmatrix}$$

et finalement le représentant de l'effet observé de la comparaison d'interaction n_1, n_2, n_3 . E-LIN E/c1

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} +3.40 \\ -2.58 \\ -0.03 \\ -8.21 \\ +1.94 \\ +1.89 \\ +1.00 \\ -2.63 \end{bmatrix}$$

à partir duquel on retrouve la grandeur de l'effet observé définie en 4.5.1

$$1 = \left(\frac{d' d}{8} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3.40^2 + 2.58^2 + 0.03^2 + 8.21^2 + 1.94^2 + 1.89^2 + 1.00^2 + 2.63^2}{8} \right)^{\frac{1}{2}} = 3.55 \text{ secondes}$$

- la moyenne quadratique des valeurs s_{n_1} , s_{n_2} et s_{n_3} ($s_{n_3} = 9.124$)

$$s = \left(\frac{10.800^2 + 8.770^2 + 9.124^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = 9.605 \text{ secondes}$$

On a ici le lien avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance:

$$cm_{n_1, n_2, n_3, E-LIN E/c1} = 141.76 = 11.25 I^2$$

$$\text{(ici } k = 11.25, \text{ comme en 4.4.3)}$$

$$cm_P(N).E-LIN E/c1 = 138.40 = 1.5s^2$$

$$\text{(ici } h = 1.5, \text{ comme en 4.4.3)}$$

L'effet observé associé à la comparaison n_1, n_2, n_3 . E-LIN E/c1 apparaît relativement important: l'ajustement linéaire est "plus ou moins mauvais" suivant les catégories d'étudiants, la différence moyenne étant de 3.5 secondes.

4.5.3 Analyse inductive

On pose ici encore le modèle multinomial des groupes séparés, avec cette fois trois groupes, d'où les paramètres δ^{n_1} , δ^{n_2} , δ^{n_3} (représentants de

l'effet théorique de la comparaison E-LIN E/c1 pour chacune des modalités de N_3) et σ ; à partir de $\delta_1 = \delta^{n_1} - \delta^{n_2}$ et $\delta_2 = (\delta^{n_1} + \delta^{n_2} - 2\delta^{n_3})/\sqrt{3}$, on définit le représentant de l'effet théorique de la comparaison n_1, n_2, n_3 . E-LIN E/c1 comme $\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$ et la grandeur de l'effet théorique $\lambda = (\delta' \delta / 8)^{\frac{1}{2}}$.

On obtient alors pour le test de signification:

$$F_{obs} = \frac{12}{bs^2} = \frac{cm_{n_1, n_2, n_3, E-LIN E/c1}}{cm_P(N).E-LIN E/c1} = 1.02$$

avec, ici, $b = \frac{h}{k} = 2/15$ et $m = 8$ et $q = (14+14+14) \times 4 = 168$ degrés de liberté

Comme dans le cas de la comparaison n_1, n_2 . E-LIN E/c1, le résultat non-significatif du test de signification (au seuil observé $p = 0.42$, calculé par programme) fait que l'on ne cherchera pas à prolonger inductivement la conclusion descriptive d'un effet important.

* * *

5 COMBINAISON DES INFORMATIONS

Les procédures fiducio-bayésiennes permettent de traduire, et de communiquer l'information apportée par les données analysées. En certains cas, on voudra dépasser ce niveau d'analyse et prendre *explicitement* en considération des éléments extérieurs aux données. On fera appel pour cela à des *procédures bayésiennes*: dans l'esprit de la démarche de l'analyse des données expérimentales, ces procédures permettent de résoudre le problème de l'intégration, de la combinaison de différents types d'informations; et nous pensons là plus particulièrement à l'information apportée par un autre ensemble de données expérimentales, *effectivement recueillies* (cas d'une autre expérience réalisée) ou encore *potentielles* (qui pourraient être fournies par une expérience future).

En pratique l'intérêt de combiner ainsi des informations sera de répondre à des questions du type: "quelle information extérieure aux données analysées, combinée à l'information expérimentale, conduirait à une conclusion différente de celle obtenue à partir de la seule information expérimentale?"; ou encore, cas un peu différent (quand l'information expérimentale est insuffisante), "quelle information expérimentale complémentaire faudrait-il recueillir pour pouvoir atteindre telle ou telle conclusion?"; etc.

Les procédures bayésiennes seront maintenant illustrées, en reprenant quelques uns des exemples précédemment traités.

* 5.1 COMPARAISONS A UN DEGRE DE LIBERTE (ANALYSE D'UN CONTRASTE)

5.1.1 Comparaison e1, e6, c1, c2

L'analyse précédente de la comparaison e1, e6, c1, c2 a fourni les valeurs:

$$d = +4.85 \quad s = 6.29$$

$$e^2 = 1.15^2 \quad q = 28$$

d'où les distributions fiducio-bayésiennes

$$\delta^* \sim t_{28} (+4.85, 1.15^2)$$

$$\sigma^* \sim 6.29 \phi_{28}^{-1}$$

permettant de conclure à un effet important.

Or, dans une expérience antérieure, réalisée avec 20 sujets (étudiants en psychologie), on n'avait pas pu, pour cette même comparaison, conclure à un effet important, le résultat non-significatif du test de signification ne permettant même pas de conclure à l'existence de l'effet.

Ici, les *procédures bayésiennes*, en permettant de combiner les résultats

des deux expériences, vont permettre de mettre à l'épreuve la conclusion en faveur d'un effet important.

Dans l'expérience antérieure (rapportée dans Lecoutre et Lecoutre, 1979), on avait obtenu les valeurs:

$$d_0 = +1.720 \quad s_0 = 7.910$$

$$e_0^2 = 1.769^2 \quad q_0 = 19$$

d'où les distributions fiducio-bayésiennes

$$\delta^* \sim t_{19} (+1.72, 1.772^2)$$

$$\sigma^* \sim 7.91 \phi_{19}^{-1}$$

Conceptuellement, les procédures bayésiennes reviennent à choisir la distribution fiducio-bayésienne relative à l'une des deux expériences comme *distribution initiale* pour l'autre expérience, et à en déduire la *distribution finale*. Ce principe étant *commutatif*, nous pouvons parler ici de *combinaison des deux distributions fiducio-bayésiennes*. En pratique, cela se traduit par le fait que la distribution finale peut être obtenue, de manière symétrique, à partir des *seules caractéristiques* des distributions fiducio-bayésiennes (c'est-à-dire d, s, e et q) relatives à chacune des deux expériences (leurs valeurs étant bien entendu considérées avec une précision suffisante).

Dérivation de la distribution finale - Il est commode de calculer comme intermédiaires

$$b = \left(\frac{e_0}{s_0}\right)^2 = 0.033 \quad (\text{en fait } 1/30)$$

$$b_0 = \left(\frac{e_0}{s_0}\right)^2 = 0.050 \quad (\text{en fait } 1/20)$$

dont on déduit ensuite les caractéristiques de la distribution finale:

$$d_1 = \frac{b_0 d + b d_0}{b_0 + b} = +3.60 \quad \text{secondes}$$

$$s_1^2 = \frac{q_0 s_0^2 + q s^2 + \frac{(d_0 - d)^2}{q_0 + q + 1}}{q_0 + q + 1} = 7.09^2$$

$$e_1^2 = \frac{b_0 b}{b_0 + b} s_1^2 = 1.00^2$$

$$q_1 = q_0 + q + 1 = 48$$

La distribution bayésienne finale est du même type que la distribution fiducio-bayésienne; simplement les valeurs d, s, e et q sont remplacées par d_1, s_1, e_1 et q_1 .

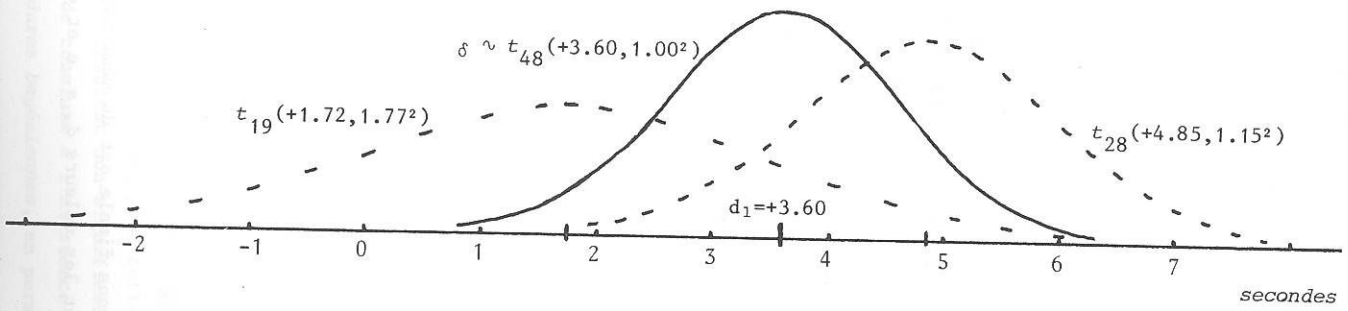


Figure 10 - Combinaison des informations: exemple de la comparaison e1,e6.c1,c2

On obtient notamment les distributions finales relatives à δ et à σ :

$$\begin{aligned} \delta &\sim t_{48} (+3.60, 1.00^2) && \text{(de la forme } t_{q_1} (d_1, e_1^2)) \\ \sigma &\sim 7.09\phi_{48}^{-1} && \text{(de la forme } s_1\phi_{q_1}^{-1}) \end{aligned}$$

La distribution relative à δ est figurée dans la figure 10.

On procède ensuite comme pour les distributions fiducio-bayésiennes et on déduit les énoncés bayésiens

$$\begin{aligned} P(\delta > 0) &= 0.9996 \\ P(\delta > +2.3) &= 0.90 \\ P(\delta < 8.2) &= 0.90 \end{aligned}$$

La prise en compte de l'information apportée par l'expérience antérieure affaiblit certes le résultat, puisque la limite inférieure pour l'effet δ avec la garantie 0.90 est maintenant +2.3 secondes, au lieu de +3.3 pour la limite fiducio-bayésienne; néanmoins on peut toujours conclure que l'effet δ est *im-*portant.

5.1.2 Comparaison n1,n2

L'analyse précédente de la comparaison n1,n2 a fourni les valeurs:

$$\begin{aligned} d &= +4.66 && s &= 13.42 && (b = \left(\frac{e}{s}\right)^2 = \frac{2}{15}) \\ e^2 &= 4.90^2 && q &= 28 \end{aligned}$$

d'où les distributions fiducio-bayésiennes

$$\begin{aligned} \delta^* &\sim t_{28} (+4.66, 4.90^2) \\ \sigma^* &\sim 13.42\phi_{28}^{-1} \end{aligned}$$

Il s'agit ici d'un cas typique où l'information expérimentale est insuffisante pour conclure. On peut alors se demander si l'information *supplémentaire* qu'apporterait une *réplique* de l'expérience permettrait d'atteindre une conclusion, soit en faveur d'un effet négligeable, soit en faveur d'un effet notable.

On aurait pour cette expérience *potentielle* les valeurs d_0 , s_0^2 , $b_0 = b = 2/15$ (puisque il s'agit d'une réplique) et $q_0 = q$ (idem). Supposons, pour simplifier, que l'on ait pour s_0 la même valeur 13.42 que pour s , et envisageons pour d_0 les trois éventualités suivantes:

- 1) $d_0 = -4.66$ (soit $d_0 = -d$)
- 2) $d_0 = 0$
- 3) $d_0 = +4.66$ (soit $d_0 = d$)

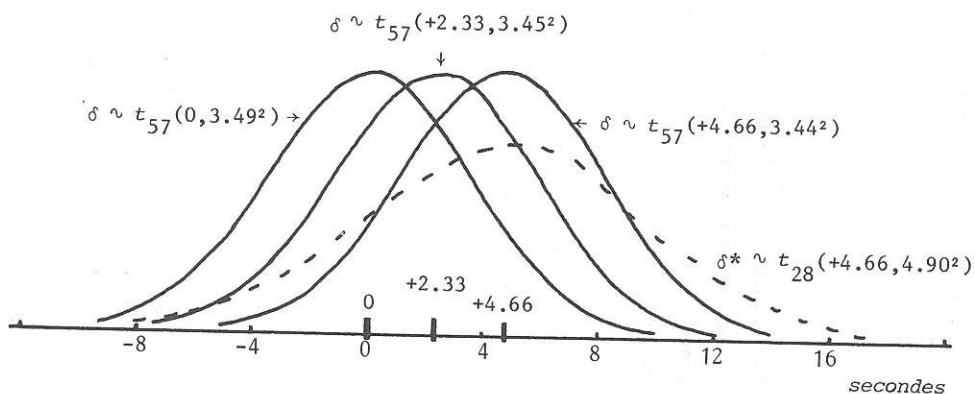


Figure 11 - Combinaison des informations: exemple de la comparaison n_1, n_2

En procédant comme pour la comparaison e_1, e_6, c_1, c_2 , on obtient respectivement les caractéristiques des distributions finales correspondant à chacune de ces trois éventualités

pour d_1 : 1) 0 ; 2) +2.33; 3) +4.66
 pour s_1 : 1) 13.52; 2) 13.36; 3) 13.31
 pour e_1 : 1) 3.49 ; 2) 3.45 ; 3) 3.44
 pour q_1 : 1) 57 ; 2) 57 ; 3) 57

d'où les distributions finales relatives à δ :

1) $d_0 = -4.66 \rightarrow \delta \sim t_{57}(0, 3.49^2)$
 2) $d_0 = 0 \rightarrow \delta \sim t_{57}(+2.33, 3.45^2)$
 3) $d_0 = +4.66 \rightarrow \delta \sim t_{57}(+4.66, 3.44^2)$

Ces distributions sont figurées dans la Figure 11.

On en déduit les énoncés bayésiens respectifs

1) $P(\delta > 0) = 0.500$ et $P(|\delta| < 5.8) = 0.90$
 2) $P(\delta > 0) = 0.749$ et $P(|\delta| < 6.9) = 0.90$
 3) $P(\delta > 0) = 0.910$ et $P(\delta > +0.2) = 0.90$

Il apparaît que, dans les deux premiers cas, l'information serait toujours insuffisante pour conclure, tandis que le troisième cas permettrait seulement de conclure (avec une garantie 0.91) à un effet positif, sans pouvoir se prononcer sur son importance. Pour approfondir l'effet du facteur Nature des études, il semble par conséquent nécessaire d'effectuer l'expérience avec un nombre plus élevé de sujets.

* 5.2 COMPARAISONS A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE

Alors que dans le cas de l'analyse d'un contraste les procédures bayésiennes ne posent pas de difficulté technique réelle comparativement aux procédures fiducio-bayésiennes, elles vont imposer, dans le cas d'une comparaison à plusieurs degrés de liberté, le choix et le calcul d'un représentant de l'effet observé (ce qui, pour les procédures fiducio-bayésiennes, reste en pratique facultatif).

Nous traiterons simplement un exemple, à valeur générale, portant sur la comparaison n_1, n_2, n_3 .

Rappelons qu'il s'agit ici de comparer globalement trois temps moyens d'exécution (pour chaque modalité n); descriptivement ces trois temps observés

sont respectivement 60.83, 56.18 et 58.56 secondes.

L'analyse fiducio-bayésienne se fait à partir des valeurs

$$\begin{aligned} l &= 3.29 \text{ secondes} \\ s &= 12.75 \text{ secondes} \\ e^2 &= 3.29^2 \\ m &= 2 \text{ et } q = 28 \end{aligned} \quad (b = m \left(\frac{e}{s}\right)^2 = \frac{2}{15})$$

d'où la distribution fiducio-bayésienne relative à la grandeur de l'effet théorique

$$\lambda \sim 3.29\psi_{2,42}(1.00)$$

Il conviendra d'y ajouter, pour les procédures bayésiennes, la valeur du représentant de l'effet observé

$$d = \begin{bmatrix} +4.656 \\ -0.064 \end{bmatrix} \text{ secondes}$$

Considérons encore, comme pour la comparaison n_1, n_2 , le cas d'une réplique potentielle de l'expérience, avec $b_0 = b = 2/15$, $q_0 = q = 42$ et toujours $s_0 = s$ (soit ici 12.75); et envisageons pour d_0 les trois éventualités suivantes:

$$\begin{aligned} 1) \quad d_0 &= -d = \begin{bmatrix} -4.656 \\ +0.064 \end{bmatrix} & d' \text{ où } l_0 &= 1 = 3.29 \\ 2) \quad d_0 &= 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & d' \text{ où } l_0 &= 0 \\ 3) \quad d_0 &= d = \begin{bmatrix} +4.656 \\ -0.064 \end{bmatrix} & d' \text{ où } l_0 &= 1 = 3.29 \end{aligned}$$

Dérivation de la distribution finale - On calcule les caractéristiques de la distribution finale à partir des formules, qui généralisent celles pour un contraste:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{b_0 d + b d_0}{b_0 + b} & d' \text{ où } l_1 &= \left(\frac{d_1' d_1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \\ s_1^2 &= \frac{q_0 s_0^2 + q s^2 + (d_0 - d)'(d_0 - d)}{b_0 + b + q_0 + q + m} \\ e_1^2 &= \frac{1}{m} \frac{b_0 b}{b_0 + b} s_1^2 \\ q_1 &= q_0 + q + m \end{aligned}$$

On obtient ainsi les valeurs numériques correspondant à chacune des

trois éventualités envisagées pour d_0 .

$$\begin{aligned} \text{pour } d_1: 1) & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; 2) \begin{bmatrix} +2.328 \\ -0.032 \end{bmatrix}; 3) \begin{bmatrix} +4.656 \\ -0.064 \end{bmatrix} \\ \text{pour } l_1: 1) & 0; 2) 1.65; 3) 3.29 \\ \text{pour } s_1: 1) & 12.75; 2) 12.63; 3) 12.60 \\ \text{pour } e_1: 1) & 2.33; 2) 2.31; 3) 2.30 \\ \text{pour } q_1: 1) & 86; 2) 86; 3) 86 \end{aligned}$$

Dans ce cas également la distribution finale est du même type que la distribution fiducio-bayésienne; simplement les valeurs d, l, s, e et q sont remplacées par d_1, l_1, s_1, e_1 et q_1 .

On obtient notamment les distributions finales relatives à λ :

$$\begin{aligned} 1) \quad d_0 &= -d \rightarrow \lambda \sim 2.33\psi(0) \\ 2) \quad d_0 &= 0 \rightarrow \lambda \sim 2.31\psi_{2,82}(0.51) & (\text{de la forme } e_1\psi_{m,q_1}\left(\frac{l_1}{s_1}\right)) \\ 3) \quad d_0 &= d \rightarrow \lambda \sim 2.30\psi_{2,86}(2.05) \end{aligned}$$

Interprétations - Dans le premier cas, en dépit de la valeur nulle de l_1 , on ne peut pas obtenir de conclusion en faveur d'un effet négligeable: on obtient par programme l'énoncé bayésien

$$P(\lambda < 5.1) = 0.90$$

(Rappelons que la valeur 3.29 de la grandeur de l'effet observé est déjà considérée comme notable)

Dans le second cas la valeur $l_1 = 1.65$ secondes peut être considérée comme relativement négligeable, puisqu'elle ne représente que 13% de la valeur $s_1 = 12.63$; mais on ne peut évidemment pas davantage que dans le cas précédent en tirer une conclusion en faveur d'un effet négligeable: on obtient cette fois

$$P(\lambda < 5.6) = 0.90$$

Enfin, dans le troisième cas, la valeur $l_1 = 3.29$ secondes, égale à la valeur de la grandeur de l'effet observé, est notable. On peut donc envisager ici la recherche d'une conclusion d'effet notable, ce qui nous ramène à la discussion développée pour cette situation en 2.1.7 dans le cadre des procédures fiducio-bayésiennes. On étendra la solution proposée dans ce cadre, en faisant appel à ce qui apparaît comme le *prolongement bayésien* du test de signification usuel: il s'agit de considérer la probabilité bayésienne que la grandeur de l'écart entre l'effet théorique représenté par δ et l'effet représenté par d_1 , soit $\xi_{d_1} = [(\delta - d_1)'(\delta - d_1)/m]^{\frac{1}{2}}$, soit supérieure à l_1 . Plus

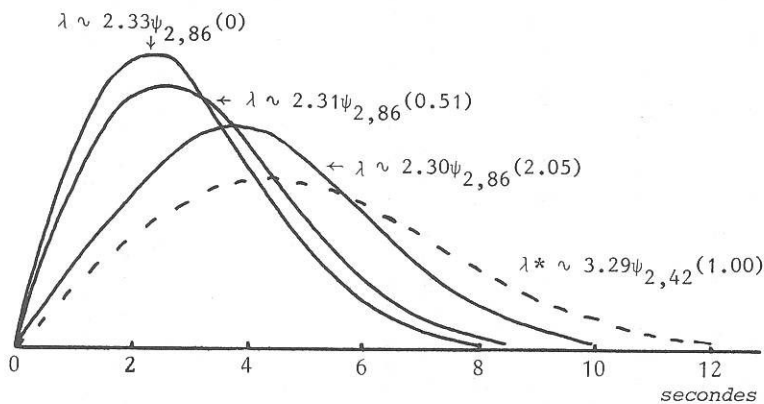


Figure 12 - Combinaison des informations: exemple de la comparaison n1,n2,n3

directement, en pratique, cela revient à remplacer la valeur $F_{obs} = 1^2/bs^2 = 1^2/me^2$ par son analogue :

$$F_1 = \frac{1^2}{me^2} = 1.02 \quad (\text{au lieu de } F_{obs} = 0.50)$$

Avec ici $m = 2$ et $q_1 = 86$ degrés de liberté, l'analogue du seuil de signification observé p du test F usuel est donc la probabilité bayésienne

$$P(\hat{d}_1 > 1_1) = P(F_{m,q_1} > F_1) = p_1$$

On obtient ici $p_1 = P(F_{2,86} > 1.02) = 0.36$; ce résultat, de même qu'un résultat non-significatif pour les procédures fiducio-bayésiennes, implique l'impossibilité d'obtenir une conclusion inductive en faveur d'un effet notable.

Comme pour la comparaison n_1, n_2 , on trouve donc que, pour approfondir l'effet du facteur Nature des études, il conviendrait d'effectuer l'expérience avec un nombre plus élevé de sujets.

* * *

6 PROCEDURES PREDICTIVES

Les procédures *prédictives* permettent de faire porter le jugement probabiliste, non plus sur les paramètres, mais sur les *statistiques pertinentes*; elles conduisent ainsi à la possibilité d'effectuer des *prédictions* relatives à des observations qui n'ont pas (ou pas encore) été effectuées. Techniquement il va s'agir de transformer la distribution finale (fiducio-bayésienne ou bayésienne) sur les paramètres issue d'une première expérience, en une autre distribution, dite *prédictive*, portant sur les valeurs possibles des statistiques pertinentes dans une nouvelle expérience.

A l'examen, on se rend compte que les méthodes *prédictives* sont susceptibles de couvrir un champ conceptuel important et, à ce titre, méritent certainement une place dans la panoplie des méthodes inférentielles pour l'analyse des données expérimentales. Elles pourraient notamment permettre de répondre aux interrogations de l'expérimentateur vis-à-vis de la *stabilité* ou de la *répétabilité* de ses résultats; elles seraient même susceptibles de remplacer purement et simplement les distributions finales relatives aux paramètres. Nous ne ferons toutefois que suggérer ici une telle réflexion sur le statut qui pourrait être accordé aux méthodes *prédictives* dans les problèmes d'analyse de données expérimentales.

Nous illustrerons la mise en oeuvre pratique des procédures *prédictives* dans le cas particulier où la *prédiction* est relative à une *réplique* de l'expérience.

Nous illustrerons également une propriété importante des procédures *prédictives* pour l'Analyse Bayésienne des Comparaisons, à savoir: la distribution *prédictive* sur les valeurs possibles de la statistique pour une expérience qui serait effectuée avec un effectif très élevé (en fait une expérience pour laquelle le problème de la généralisation des résultats ne se poserait pas) coïncide avec la distribution sur les valeurs possibles du paramètre correspondant.

* 6.1 PROCEDURES PREDICTIVES POUR UNE REPLIQUE DE L'EXPERIENCE

Dans le cas d'une réplique de l'expérience, il est immédiat de déduire la distribution *prédictive* à partir de la distribution finale, fiducio-bayésienne ou bayésienne, relative au paramètre. Ceci sera illustré sur l'exemple des comparaisons $c_1, c_2/e_1$ et n_1, n_2 (cas d'un contraste) et n_1, n_2, n_3 (cas d'une comparaison à plusieurs degrés de liberté). Nous considérerons ici les procédures fiducio-bayésiennes, la généralisation aux procédures bayésiennes étant immédiate.

6.1.1 Comparaison $c_1, c_2/e_1$

Distribution prédictive relative à d - A partir de la distribution fiducio-bayésienne relative à δ

$$\delta^* \sim t_{28} (+30.63, 5.83^2) \quad (\text{de la forme } t_q(d, e^2))$$

On obtient immédiatement la distribution *prédictive* (fiducio-bayésienne) relative à la statistique "effet observé" d pour une réplique de l'expérience:

$$d^* \sim t_{28} (+30.63, 8.24^2) \quad (\text{de la forme } t_q(d, 2e^2))$$

(d' où $8.24 = 5.83\sqrt{2}$)

Cette distribution est figurée dans la figure 13.

On en déduit les énoncés *prédictifs*

$$P(d^* > 0) = 0.9996 \quad (\text{obtenu par programme})$$

$$P(d^* > +19.8) = 0.90$$

On a donc une probabilité fiducio-bayésienne très élevée (0.9996) que dans une réplique de l'expérience, l'effet observé soit encore positif; on a en outre une garantie élevée que cet effet soit encore important.

Distribution prédictive relative à s - A partir de la distribution fiducio-bayésienne relative à σ

$$\sigma^* \sim 31.91\phi_{28}^{-1} \quad (\text{de la forme } s\phi_q^{-1})$$

on obtient immédiatement la distribution *prédictive* relative à la statistique s pour une réplique de l'expérience:

$$s^* \sim 31.91F_{28, 28}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{de la forme } sF_{q, q}^{\frac{1}{2}})$$

Cette distribution est également figurée dans la figure 13.

Les énoncés *prédictifs* relatifs à s peuvent être obtenus en utilisant la distribution du F usuelle, à partir de la distribution de s^* :

$$s^{2*} \sim 1017.96F_{28, 28} \quad (\text{de la forme } s^2F_{q, q})$$

On obtient par exemple ici

$$P(s^* < 40.8) = 0.90$$

Distribution prédictive relative au rapport d/s - A partir de la distribution fiducio-bayésienne relative au rapport δ/σ

$$\frac{\delta^*}{\sigma} \sim L'_{28} (+0.96, 0.18^2) \quad (\text{de la forme } L'_q\left(\frac{d}{s}, \frac{e^2}{s^2}\right))$$

On obtient immédiatement la distribution *prédictive* relative au rapport d/s

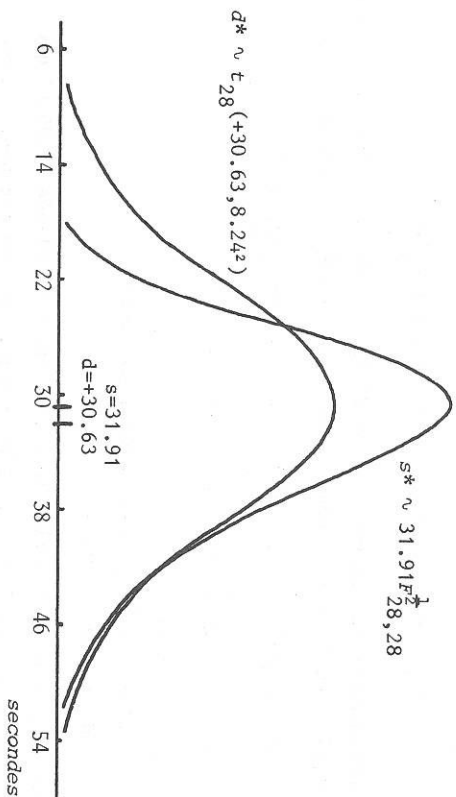


Figure 13 - Distributions prédictives relatives à d et à s pour une réplique de l'expérience: comparaison c1, c2/e1

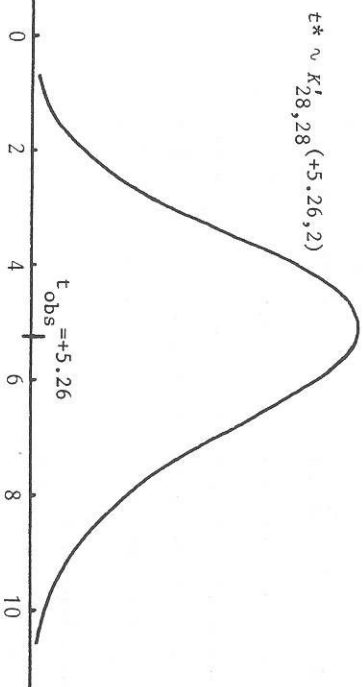


Figure 14 - Distribution prédictive relative à t pour une réplique de l'expérience: comparaison c1, c2/e1

pour une réplique de l'expérience:

$$\left\| \frac{d^*}{s} \sim K'_{28,28}(+0.96, 0.26^2) \quad (\text{de la forme } K'_{q,q}(\frac{d}{s}, 2\frac{e^2}{s^2})) \right.$$

La distribution K' sera illustrée à propos de la distribution prédictive relative à la statistique de test t (proportionnelle à d/s).

Distribution prédictive relative à la statistique de test t - A partir de la valeur $t_{obs} = +5.26$, il est immédiat d'obtenir la distribution prédictive relative à la statistique de test t pour une réplique de l'expérience:

$$\left\| t^* \sim K'_{28,28}(+5.26, \sqrt{2}^2) \quad (\text{de la forme } K'_{q,q}(t_{obs}, 2)) \right.$$

Cette distribution est figurée dans la figure 14; le lien avec la distribution relative au rapport d/s est assuré par les relations $t = \frac{d/e}{s/e}$ et $t_{obs} = d/e$.

Cette distribution prédictive permet de répondre à des questions du type: "quelle est la probabilité d'obtenir, dans une réplique de l'expérience, un résultat significatif à un seuil donné?". Ici, par exemple, avec $q = 28$ degrés de liberté, pour que l'effet soit positif (comme dans la première expérience) et que le résultat du test de signification soit significatif au seuil fixé (unilatéral) 0.05, il faut que la statistique t dépasse la valeur +2.048. On trouve ici que l'on a une probabilité fiducio-bayésienne 0.977 d'obtenir un tel résultat; ceci correspond à l'énoncé prédictif (obtenu par programme)

$$P(t^* > +2.048) = 0.977$$

6.1.2 Comparaison $n1, n2$

Nous nous limiterons ici à considérer la distribution prédictive relative à d . A partir de la distribution fiducio-bayésienne relative à δ

$$\delta^* \sim t_{28}(+4.66, 4.90^2)$$

on obtient, de la même manière que pour la comparaison $c1, c2/e1$:

$$\left\| d^* \sim t_{28}(+4.66, 6.93^2) \right.$$

d'où

$$P(d^* > 0) = 0.747 \quad (\text{obtenu par programme})$$

$$P(|d^*| < 14) = 0.90$$

Ici la probabilité fiducio-bayésienne que, dans une réplique de l'expérience, l'effet observé soit encore positif n'est que 0.747; on peut seulement prédire qu'avec une garantie fiducio-bayésienne 0.90 cet effet serait, en valeur absolue, inférieur à 14 secondes.

6.1.3 Comparaison n_1, n_2, n_3

Distribution prédictive relative à l - A partir de la distribution fiducio-bayésienne relative à λ

$$\lambda^* \sim 3.29\psi_{2,42}(1.00) \quad (\text{de la forme } e\psi_{m,q}(\frac{l^2}{e^2}))$$

on obtient immédiatement la distribution prédictive (fiducio-bayésienne) relative à la statistique "grandeur de l'effet observé" l pour une réplique de l'expérience:

$$\| \lambda^* \sim 4.65\psi_{2,42}(0.50) \quad (\text{de la forme } \sqrt{2}e\psi_{m,q}(\frac{l^2}{2e^2}))$$

Cette distribution est figurée dans la figure 15.

On en déduit les énoncés prédictifs (obtenus par programme)

$$P(l^* > 2.5) = 0.90$$

$$P(l^* < 11.4) = 0.90$$

Dans ce cas la distribution prédictive est très dispersée, comme l'est d'ailleurs déjà la distribution relative à λ .

Distribution prédictive relative à s - A partir de la distribution fiducio-bayésienne relative à σ

$$\sigma^* \sim 12.75\phi_{42}^{-1}$$

on déduit, comme en 6.1.1, la distribution prédictive relative à s :

$$\| s^* \sim 12.75F_{42,42}^{\frac{1}{2}}$$

d'où les énoncés prédictifs

$$P(s^* > 10.4) = 0.90$$

$$P(s^* < 15.6) = 0.90$$

Distribution prédictive relative au rapport l/s - A partir de la distribution fiducio-bayésienne relative au rapport λ/σ

$$\frac{\lambda^*}{\sigma^*} \sim 0.26L_{2,42}(1.00) \quad (\text{de la forme } \frac{e}{s} L_{m,q}(\frac{l^2}{e^2}))$$

on obtient immédiatement la distribution prédictive relative au rapport l/s :

$$\| \frac{l^*}{s^*} \sim 0.37K_{2,42,42}(0.50) \quad (\text{de la forme } \sqrt{2} \frac{e}{s} K_{m,q}(\frac{l^2}{2e^2}))$$

Cette distribution est figurée dans la figure 16.

Distribution prédictive relative à la statistique de test F - A partir de la valeur $F_{obs} = 0.50$, il est immédiat d'obtenir la distribution prédictive

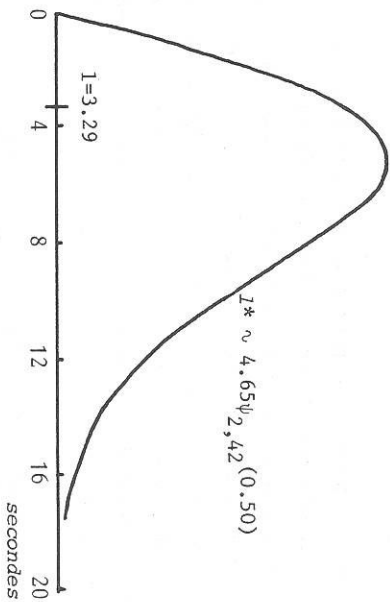


Figure 15 - Distribution prédictive relative à l pour une réplique de l'expérience: comparaison n_1, n_2, n_3

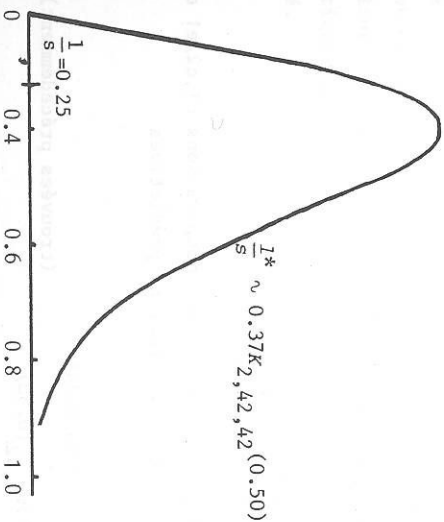


Figure 16 - Distribution prédictive relative à l/s pour une réplique de l'expérience: comparaison n_1, n_2, n_3

relative à la statistique de test F pour une réplique de l'expérience:

$$F^* \sim K_{2,42,42}^2 (0.50) \quad (\text{de la forme } \frac{2}{m} K_{m,q,q}^2 \left(\frac{m}{2} F_{\text{obs}} \right))$$

Le lien avec la distribution relative au rapport l/s est assuré par les relations $F = \frac{l^2/m\sigma^2}{s^2/s^2}$ et $F_{\text{obs}} = l^2/m\sigma^2$.

Cette distribution prédictive permet de répondre à des questions du type: "quelle est la probabilité d'obtenir, dans une réplique de l'expérience, un résultat significatif à un seuil donné?". Ici, par exemple, avec $m = 2$ et $q = 42$ degrés de liberté, pour que le test de signification soit significatif au seuil fixé $\alpha = 0.05$, il faut que la statistique F dépasse la valeur 3.220. On trouve ici que l'on a une probabilité fiducio-bayésienne 0.29 d'obtenir un tel résultat; ceci correspond à l'énoncé prédictif (obtenu par programme)

$$P(F^* > 3.220) = 0.29$$

* 6.2 ILLUSTRATION D'UNE PROPRIÉTÉ DES DISTRIBUTIONS PREDICTIVES

Considérons maintenant le cas où la distribution prédictive est relative, non plus à une réplique de l'expérience, mais à une expérience qui serait effectuée avec des effectifs multipliés par une constante c . Ainsi, dans l'expérience considérée ici, on aurait, pour chaque modalité n_1, n_2 et éventuellement $n_3, 15x$ paires de sujets au lieu de 15.

La distribution prédictive (fiducio-bayésienne) relative à d ou à l est alors de la forme:

$$d^* \sim t_q \left(d, \left(1 + \frac{1}{c}\right) e^2 \right)$$

ou

$$l^* \sim \left(1 + \frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\psi_{m,q}} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{c}} \frac{l^2}{e^2} \right)$$

Par exemple, en reprenant le cas des comparaisons $c_1, c_2/e_1$ et n_1, n_2, n_3 , on obtient respectivement les distributions prédictives

- pour $c = 1$ (réplique)

$$d^* \sim t_{28} (+30.63, 8.24^2)$$

$$l^* \sim 4.65\psi_{2,42} (0.50)$$

(trouvées précédemment)

- pour $c = 10$ (150 paires de sujets à l'intérieur de chaque modalité n)

$$d^* \sim t_{28} (+30.63, 6.11^2)$$

$$l^* \sim 3.45\psi_{2,42} (0.91)$$

- pour $c = 100$ (1500 paires de sujets)

$$d^* \sim t_{28} (+30.63, 5.85^2)$$

$$l^* \sim 3.32\psi_{2,42} (0.99)$$

- pour $c = 1000$ (15000 paires de sujets)

$$d^* \sim t_{28} (+30.63, 5.83^2)$$

$$l^* \sim 3.29\psi_{2,42} (1.00)$$

Les distributions correspondant aux valeurs $c = 1$, $c = 10$ et $c = 1000$ sont figurées dans les figures 17, pour la comparaison $c_1, c_2/e_1$, et 18, pour la comparaison n_1, n_2, n_3 .

Rappelons les distributions fiducio-bayésiennes relatives aux valeurs théoriques δ et σ :

$$\delta^* \sim t_{28} (+30.63, 5.83^2)$$

$$\sigma^* \sim 3.29\psi_{2,42} (1.00)$$

En pratique la distribution prédictive relative à la statistique pour une expérience qui serait effectuée avec un nombre très élevé de sujets (en théorie un nombre tendant vers l'infini) coïncide donc avec la distribution relative au paramètre (ici fiducio-bayésienne ou, plus généralement bayésienne). Cette propriété que l'on rencontre ici (elle n'a pas un caractère universel) est importante sur le plan conceptuel, puisqu'elle permet d'assimiler la valeur théorique du paramètre avec la valeur qu'on observerait pour la statistique correspondante dans une expérience réalisée avec un effectif très élevé.

* * *

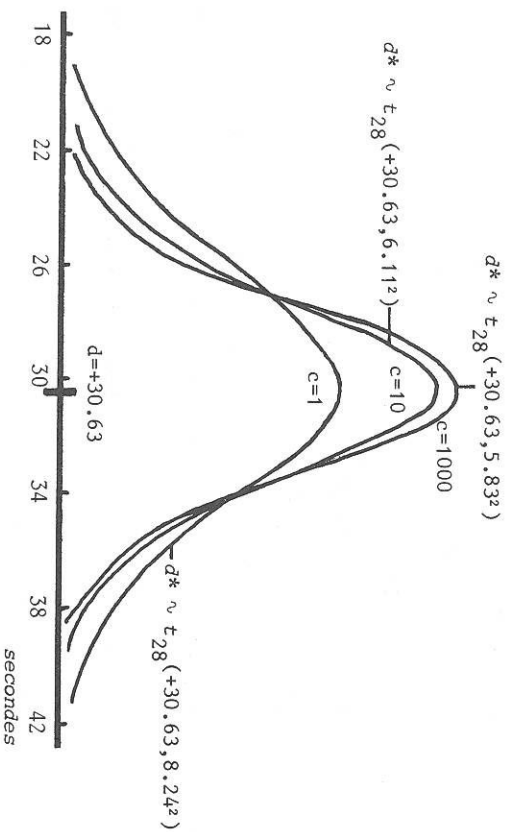


Figure 17 - Propriété des distributions prédictives: illustration pour la comparaison $c_1, c_2/e_1$

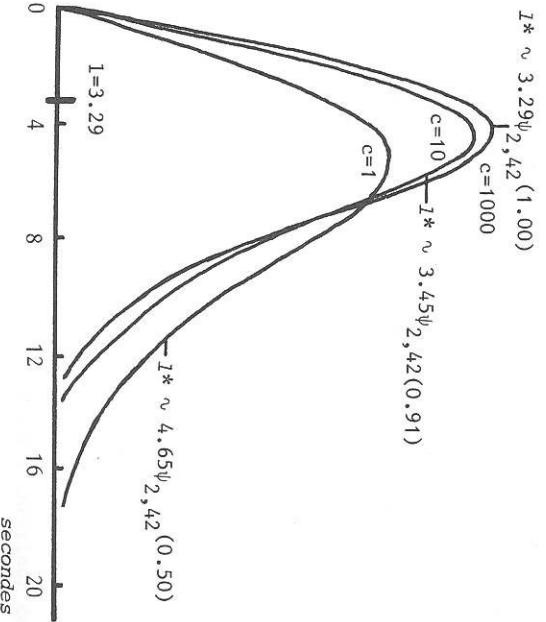


Figure 18 - Propriété des distributions prédictives: illustration pour la comparaison n_1, n_2, n_3

7 CAS NON-EQUILIBRE

Pour un plan $A \times G \times T$ "non-équilibré", c'est-à-dire avec des nombres de modalités de A affectées à chaque modalité g de G qui ne sont pas égaux (des "effectifs différents"), tous les développements théoriques précédemment illustrés continuent de s'appliquer; simplement il résultera en général de l'inégalité des effectifs un certain nombre de problèmes, soit d'ordre essentiellement méthodologique - doit-on ou non tenir compte de cette inégalité -, soit d'ordre plus technique - comment tenir compte de cette inégalité dans le choix d'un indicateur de l'effet? -.

Pour donner un aperçu de ces problèmes, imaginons à titre d'illustration une situation où il y a quatre groupes de sujets, d'effectifs respectifs différents, disons pour fixer les idées: 32, 20, 24 et 17.

Supposons que l'on veuille comparer le premier groupe (qui, par exemple, est un groupe contrôle) à l'ensemble des trois autres groupes. Si l'on ne désire pas tenir compte de l'inégalité des effectifs, on caractérisera l'effet observé associé à cette comparaison comme la différence entre la moyenne observée pour le premier groupe et la moyenne équilibrée des moyennes observées pour chacun des trois autres groupes; si au contraire on veut explicitement tenir compte de l'inégalité des effectifs, on prendra la moyenne pondérée (par les effectifs respectifs) de ces trois dernières moyennes. Formellement, ceci correspond au fait au choix entre deux contrastes différents (c'est-à-dire encore entre deux comparaisons différentes), dans le premier cas, équilibré, le contraste de coefficients $(+1, -1/3, -1/3, -1/3)$ et dans le second cas, pondéré, le contraste de coefficients $(+1, -20/61, -24/61, -17/61)$.

Dans le cas plus complexe d'une comparaison à plusieurs degrés de liberté, par exemple ici la comparaison globale des trois derniers groupes, un choix analogue se présentera entre, en fait, deux comparaisons, l'une "équilibrée" et l'autre "pondérée" (d'un point de vue formel, on remarquera donc ici l'équivalence de l'expression "la comparaison globale" sans autre précision). On rencontrera dans ce cas une difficulté technique supplémentaire, à savoir qu'il n'est sans doute pas évident a priori de définir un indicateur de la grandeur de l'effet pour la comparaison pondérée.

Méthodologiquement, la question de savoir si l'on doit ou non tenir compte de l'inégalité des effectifs renverra souvent à l'origine de cette inégalité. Dans certains cas celle-ci pourra être purement fortuite (par exemple, le dispositif d'enregistrement n'aura pas toujours fonctionné...); à l'opposé, cette inégalité pourra avoir été voulue par l'expérimentateur (par exemple,

pour refléter des tailles de populations dont sont extraits les groupes). Dans la première situation on pourra s'interroger sur l'intérêt de tenir compte de l'inégalité des effectifs, alors que dans la seconde situation il semblera souhaitable d'en tenir compte explicitement.

Sans aller plus loin dans les considérations méthodologiques, nous illustrerons maintenant, à partir de quelques exemples à valeur générale, l'analyse des comparaisons dans le cadre d'un plan $A \times G \times T$ non-équilibré, en tenant compte explicitement de la pondération sur G. Pour cela, considérant toujours l'expérience d'apprentissage perceptif incident, et nous limitant à la condition c1, nous introduirons le facteur supplémentaire "Sexe", noté ici H_2 . Le plan d'analyse pourra alors s'écrire $P \times N \times H_2 \times E_6 / c1$, ou encore puisque l'on conditionne par c1 $S \times N \times H_2 \times E_6 / c1$, avec N_2 ou N_3 suivant que nous considérerons deux ou trois catégories d'étudiants.

Les effectifs sont ici les suivants (pour h_1 , sexe féminin, et h_2 , sexe masculin):

$n1h1 \rightarrow$	10 sujets correspondant aux paires notées p1 à p10;
$n1h2 \rightarrow$	5 sujets correspondant aux paires notées p11 à p15;
$n2h1 \rightarrow$	6 sujets correspondant aux paires notées p16 à p21;
$n2h2 \rightarrow$	9 sujets correspondant aux paires notées p22 à p30;
$n3h1 \rightarrow$	7 sujets correspondant aux paires notées p31 à p37;
$n3h2 \rightarrow$	8 sujets correspondant aux paires notées p38 à p45.

(On remarquera ici que, si l'on ne se limite pas à la condition c1, le plan d'expérience, avec l'introduction du facteur Sexe, n'est plus un plan du type $A \times G \times T$, le facteur Paires n'étant pas emboîté dans le facteur Sexe, ni croisé avec lui, puisque, selon les paires, les deux sujets sont de même sexe ou de sexes différents; bien entendu, on pourrait tenir compte de ce fait dans la construction de l'expérience, par exemple en constituant des paires de sujets de même sexe)

Nous considérerons, à titre d'illustration, l'analyse des comparaisons suivantes:

$e1, e6/c1$
$n1, n2, n3/h1 \times c1$
$n1, n2, n3, h1, h2/c1$
$n1, n2 \times h1, h2 - E - LIN E/c1$

* 7.1 ANALYSE DE LA COMPARAISON $e1, e6/c1$

La comparaison $e1, e6/c1$, analysée dans le cadre du plan $P \times N \times H_2 \times E_6 / c1$, fournit un exemple à valeur générale d'analyse d'une comparaison à un degré de liberté du type $W/c1$, pour le cas non-équilibré. Il est clair que, par la

définition même de la structure $A \times G \times T$, toute comparaison du type $W/G1$ est une comparaison sur un support équilibré: on a toujours le même nombre d'observations pour chaque traitement t. Par conséquent le problème du choix entre solution équilibrée et solution pondérée ne se pose pas pour une comparaison de ce type (voir cependant la remarque faite plus loin en 7.1.1). D'une manière générale, pour l'analyse d'une comparaison du type $W/G1$, la pondération sur G n'aura aucune incidence sur la définition de la comparaison, et donc sur la caractérisation de l'effet.

7.1.1 Analyse descriptive

Ainsi, pour la comparaison $e1, e6/c1$, l'introduction du facteur Sexe, qui crée le non-équilibre, ne modifie pas la valeur $d = +10.95$ secondes, qui est l'effet observé associé au contraste entre les moyennes 99.10 et 44.37, de coefficients (+1/5, -1/5), défini précédemment dans le cadre du plan d'analyse $P_{-15} \times N_2 \times C_2 \times E_6$. Les effets individuels restent évidemment les mêmes; seulement, le protocole dérivé pertinent comporte maintenant quatre groupes, au lieu de deux.

Pour résumer ce protocole dérivé pertinent, on considère maintenant:

- la moyenne des effets individuels pour chacune des quatre modalités $n1h1, n1h2, n2h1$ et $n2h2$

$$d^{n1h1} = +11.140; d^{n1h2} = +7.320; d^{n2h1} = +10.733; d^{n2h2} = +12.889$$

à partir desquelles on calcule l'effet observé d comme la moyenne pondérée par les effectifs

$$d = \frac{10 \times 11.140 + 5 \times 7.320 + 6 \times 10.733 + 9 \times 12.889}{30} = +10.95 \text{ secondes}$$

- les écarts-types-corrigés pour chaque modalité $n1h1, n1h2, n2h1$ et $n2h2$

$$s_{n1h1} = 6.502; s_{n1h2} = 5.228; s_{n2h1} = 2.069; s_{n2h2} = 5.676$$

puis leur moyenne quadratique pondérée par les nombres de degrés de liberté, respectivement 10-1 = 9, 5-1 = 4, 6-1 = 5 et 9-1 = 8

$$s = \sqrt{\frac{9 \times 6.502^2 + 4 \times 5.228^2 + 5 \times 2.069^2 + 8 \times 5.676^2}{9+4+5+7}} = 5.44 \text{ secondes}$$

Le lien avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance est le même que dans le cadre du plan $P \times N \times C_2 \times E_6$:

$$cm_{e1, e6/c1} = 44 \ 936.07 = 375d^2$$

(la valeur 44 936.07 est inchangée)

$$cm_{P(N*H).e1,e6/c1} = 369.67 = \frac{25}{2} s^2$$

Remarque - A partir du protocole dérivé pertinent des effets individuels, nous avons défini l'effet observé d comme la moyenne pondérée des effets δ_{nh} associés à chacun des quatre groupes. Or on pourrait parfaitement envisager ici, si l'on ne désirait pas tenir compte de la pondération sur le facteur $G_4 = N_2 * H_2$, de définir l'effet (moyen) observé comme la moyenne équilibrée des effets pour chaque groupe δ_{nh} , soit ici $d = (+11.14 + 7.32 + 10.73 + 12.89) / 4 = +10.52$. Dans cette éventualité, d serait toujours l'effet associé à un contraste, mais ce contraste ne correspondrait plus à une comparaison du type $W/G1$; en effet ce contraste serait le contraste sur le support $N_2 * H_2 * e1, e6/c1$ de coefficients $+1/4$ pour chacune des modalités $n1h1 * e1c1, n1h2 * e1c1, n2h1 * e1c1, n2h2 * e1c1$, et $-1/4$ pour chacune des modalités $n1h1 * e6c1, n1h2 * e6c1, n2h1 * e6c1, n2h2 * e6c1$. Il s'agirait donc du contraste sur $G * T$, produit du contraste $(+1, -1)$ sur le support $e1, e6/c1$ et de la mesure uniforme $(+1/4, +1/4, +1/4, +1/4)$ sur $N_2 * H_2$.

S'il est donc bien exact que, comme nous l'avons énoncé plus haut, le problème du choix entre solution équilibrée et solution pondérée ne se pose pas pour une comparaison du type $W/G1$, il n'en est pas moins vrai que ce problème peut être traité si on recourt à une classe plus large de comparaisons; cela conduit à considérer des contrastes sur $G * T$ définis comme le produit d'un contraste sur T et d'une mesure uniforme sur G (comme dans l'exemple ci-dessus); il s'agit par conséquent d'une classe de comparaisons dont l'analyse n'a pas été envisagée dans cet ouvrage, mais pour laquelle on pourrait cependant aisément étendre les solutions applicables au type $W.W$.

7.1.2 Analyse inductive

Les procédures inférentielles pour l'analyse de la comparaison $e1, e6/c1$ s'obtiennent de la même manière que dans le cas équilibré du plan $P_{15} < N_2 * G_2 * E_6$; on pose le modèle équilibré des groupes séparés caractérisé ici par les paramètres $\delta_{n1h1}, \delta_{n1h2}, \delta_{n2h1}, \delta_{n2h2}$ et σ , l'effet théorique δ étant défini comme la moyenne pondérée $(10\delta_{n1h1} + 5\delta_{n1h2} + 6\delta_{n2h1} + 9\delta_{n2h2}) / 30$, de manière analogue à d.

On obtient alors:

- pour le test de signification

$$t_{obs} = \frac{d}{\sqrt{bs}} = +11.03$$

avec, ici, $b = \frac{1}{10+5+6+9} = \frac{1}{30}$ et $q = (10-1) + (5-1) + (6-1) + (9-1) = 26$ degrés de liberté

$$\left\| \begin{array}{l} F_{obs} = t_{obs}^2 = \frac{cm_{e1,e6/c1}}{cm_{P(N*H).e1,e6/c1}} = 121.56 \text{ (avec } t \text{ et } 26 \text{ d.l.)} \\ \end{array} \right\|$$

- pour les procédures fiduciaire-bayésiennes

$$e^2 = \frac{d^2}{F_{obs}} = 0.992$$

d'où

$$\left\| \begin{array}{l} \delta^* \sim t_{26} (+10.95, 0.992) \\ \sigma^* \sim 5.44_{26}^{-1} \end{array} \right\|$$

On retrouve donc, à peu de chose près, les résultats obtenus précédemment sans introduire le facteur Sexe.

* 7.2 ANALYSE DE LA COMPARAISON $n1, n2, n3/h1 * c1$

La comparaison $n1, n2, n3/h1 * c1$, analysée dans le cadre du plan d'analyse $P < N_3 * H_2 * E_6 / c1$, fournit un premier exemple d'analyse d'une comparaison du type $W/T1$ dans le cas non-équilibré; il s'agit ici d'un exemple à valeur générale pour le cas où W est du type "comparaison globale sur un support".

7.2.1 Résumé de l'analyse

Caractérisation de la grandeur de l'effet observé - Descriptivement, il s'agit de comparer les trois temps moyens observés: pour $n1h1 * c1$, 69.000 secondes; pour $n2h1 * c1$, 48.583 secondes; pour $n3h1 * c1$, 67.381 secondes; ces trois temps sont respectivement les moyennes de 60 (10 sujets par 6 essais), 36 (6x6) et 42 (7x6) observations. On cherchera ici à caractériser la grandeur de l'effet observé en tenant compte de cette pondération. Comme dans le cas équilibré, on va construire l'indicateur de la grandeur de l'effet à partir des valeurs absolues des différences entre les trois moyennes prises deux à deux:

$$\begin{array}{l} |69.00 - 48.58| = 20.42 \\ |69.00 - 67.38| = 1.62 \\ |48.58 - 67.38| = 18.80 \end{array}$$

Ces différences, ordonnées, valent donc 1.62, 18.80 et 20.42 et on peut prendre comme indicateur de la grandeur de l'effet associé à la comparaison $n1, n2, n3/h1 * c1$ leur moyenne quadratique, pondérée par les produits des deux *effects* associés à chacune de ces différences, soit:

$$\left\| 1 = \frac{(60 \times 36 \times 20.42^2 + 60 \times 42 \times 1.62^2 + 36 \times 42 \times 18.80^2)^{\frac{1}{2}}}{60 \times 36 + 60 \times 42 + 36 \times 42} = 15.26 \text{ secondes} \right\|$$

Tableau 6 - Protocole dérivé pertinent pour la comparaison $n_1, n_2, n_3/h_1 * c_1$

	$\frac{n_1 h_1}{x}$	$\frac{n_2 h_1}{x}$	$\frac{n_3 h_1}{x}$
p1	82.000	45.833	54.167
p2	62.000	49.167	71.333
p3	122.167	53.000	63.167
p4	50.167	56.833	55.667
p5	46.667	46.833	90.667
p6	54.667	39.833	61.833
p7	96.833		74.833
p8	54.167		
p9	50.667		
p10	70.667		
\sum	$n_1 h_1 = 69.000$	$n_2 h_1 = 48.583$	$n_3 h_1 = 67.381$
s	$s_{n_1 h_1} = 24.579$	$s_{n_2 h_1} = 5.918$	$s_{n_3 h_1} = 12.739$

secondes

Analyse descriptive - Le protocole dérivé pertinent est le protocole qui, à chaque sujet, à l'intérieur de chacune des trois modalités $n_1 h_1, n_2 h_1, n_3 h_1$, associe la moyenne des six observations effectuées pour ce sujet (pour chacun des six essais); il est présenté dans le tableau 6. Pour résumer ce protocole numérique, on considérera les statistiques suivantes:

- Les moyennes des observations pour chaque modalité $n_1 h_1, n_1 h_2, n_1 h_3$

$$x_{n_1 h_1} = 69.00, x_{n_2 h_1} = 48.58, x_{n_2 h_2} = 67.38$$

à partir desquelles on calcule la valeur de la grandeur de l'effet observé

$$1 = 15.26 \text{ secondes}$$

- La moyenne quadratique des écarts-types-corrigés pour chaque modalité $n_1 h_1, n_2 h_1, n_3 h_1$, pondérés par leurs nombres de degrés de liberté

$$s = \sqrt{\frac{9 \times 24.58^2 + 5 \times 5.92^2 + 6 \times 12.74^2}{9+5+6}} = 18.15 \text{ secondes}$$

On a ici le lien suivant avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance:

$$c_{m_{n_1, n_2, n_3/h_1 * c_1}} = 5221.91 = \frac{516}{23} \cdot 1^2$$

(ici $k = 516/23 = \frac{1}{2}(46 - \frac{156}{60+36+42})$, où 46 et 156 sont respectivement la moyenne et la variance-corrigée des trois effectifs 60, 36 et 42)

$$c_{m_P(N)/h_1 * c_1} = 1975.82 = 6s^2$$

(6 est le nombre de traitements sur lesquels on a moyenné, comme dans le cas équilibré)

Analyse inductive - On obtient alors les procédures inférentielles, de la même manière que dans le cas équilibré, notamment:

$$F_{\text{obs}} = \frac{1^2}{b s^2} = \frac{c_{m_{n_1, n_2, n_3/h_1 * c_1}}}{c_{m_P(N)/h_1 * c_1}} = 2.64$$

avec, ici, $b = \frac{6}{k} = 23/86$ et avec $m = 2$ et $q = 9+5+6 = 20$ degrés de liberté

$$e^2 = \frac{1^2}{m F_{\text{obs}}} = 6.64^2$$

La valeur observée $1 = 15.26$ secondes apparaît ici importante; mais le résultat du test de signification étant non-significatif (au seuil observé $p = 0.125$, calculé par programme), on ne cherchera pas à prolonger inductivement ce résultat.

7.2.2 Problème du choix d'un représentant de l'effet

Nous illustrerons maintenant le problème du choix d'un représentant de l'effet dans le cas non-équilibré; la solution est analogue à celle adoptée précédemment pour la comparaison n_1, n_2, n_3 (cas équilibré), mais ici la norme et la condition d'orthogonalité des contrastes doivent être calculées en tenant compte de la pondération.

On choisira donc encore deux contrastes, orthogonaux et de norme $1/\sqrt{k}$, soit ici $\sqrt{23/516}$.

- Le contraste sur N_3 de coefficients $(+1, -1, 0)$, choisi précédemment, n'a pas la norme requise et ne convient donc plus ici; mais on peut choisir un contraste qui lui soit proportionnel, c'est-à-dire de la forme $(+c, -c, 0)$, tel que l'on ait pour sa norme:

$$\left(\frac{c^2}{60} + \frac{c^2}{36}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{23/516}$$

d'où $c = \sqrt{345/344}$.

- Le contraste précédent est orthogonal à tout contraste de la forme $(+10c/16, +6c/16, -c)$, correspondant à la comparaison $n_1, n_2, n_3/h_1c_1$, puisque:

$$\frac{+10c^2/16}{60} + \frac{-6c^2/16}{36} = 0$$

La condition sur la norme s'écrit ici:

$$\left(\frac{100c^2/256}{60} + \frac{36c^2/256}{36} + \frac{c^2}{42}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{23/516}$$

d'où $c = \sqrt{56/43}$.

Les effets observés associés à chacun des deux contrastes ainsi définis sont respectivement $d_1 = +20.446$ et $d_2 = -6.890$, d'où le représentant de l'effet observé de la comparaison $n_1, n_2, n_3/h_1c_1$:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} +20.446 \\ -6.890 \end{pmatrix} \text{ secondes}$$

La grandeur de l'effet observé l est, comme dans le cas équilibré, la moyenne quadratique:

$$\left\| \mathbf{l} = \left(\frac{\mathbf{d}'\mathbf{d}}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{20.446^2 + 6.890^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 15.26 \text{ secondes} \right.$$

* 7.3 ANALYSE DE LA COMPARAISON $n_1, n_2, n_3, h_1, h_2/c_1$

La comparaison $n_1, n_2, n_3, h_1, h_2/c_1$ fournit un autre exemple d'analyse d'une comparaison à plusieurs degrés de liberté du type V/T_1 , dans le cas non-

équilibré; cet exemple correspond au cas où V est une comparaison d'interaction.

7.3.1 Caractérisation de la grandeur de l'effet observé

Le problème essentiel qui se pose ici est celui du choix d'un indicateur de la grandeur de l'effet observé; nous proposerons ici une solution, sans en donner de justification théorique détaillée (cette solution utilise les résultats de Le Roux et Rouanet, 1983).

Descriptivement, on considère d'abord les six temps moyens observés pour chacun des six groupes de sujets définis par le croisement $N_3 \times H_2$, conditionnellement à c_1 :

	h_1	h_2	
n_1	69.000	70.867	
n_2	48.583	74.537	
n_3	67.381	64.938	/c1

Si N n'avait que deux modalités, on considérerait naturellement pour caractériser l'interaction la "différence des différences de moyennes", soit par exemple, en se limitant à n_1 et n_2 : $(69.000 - 70.867) - (48.583 - 74.537) = +24.09$ secondes. Il apparaît donc raisonnable de construire l'indicateur de la grandeur de l'effet observé à partir des valeurs absolues des trois différences de différences que l'on peut ainsi définir:

$$\begin{aligned} |(69.00 - 70.87) - (48.58 - 74.54)| &= 24.09 \\ |(69.00 - 70.87) - (67.38 - 64.94)| &= 4.31 \\ |(48.58 - 74.54) - (67.38 - 64.94)| &= 28.40 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier équilibré, on aurait simplement pris la moyenne quadratique équilibrée de ces trois quantités; ici il convient de considérer une moyenne pondérée. La pondération est construite à partir des effectifs associés à chacun des six temps moyens considérés:

	h_1	h_2	
n_1	60	30	
n_2	36	54	
n_3	42	48	/c1

On se trouve ici dans un cas particulier: d'une part le facteur H n'a que deux modalités, et d'autre part la pondération (marginale) sur le facteur N est uniforme (il y a 90 observations pour chaque modalité n). On peut alors (dans ce cas particulier) prendre comme indicateur de la grandeur de l'effet observé

associé à la comparaison d'interaction $n_1, n_2, n_3, h_1, h_2/c_1$ La moyenne quadratique des trois différences de différences de moyennes, pondérée par le produit des quatre effectifs associés à chacune d'elles, soit:

$$1 = \frac{(60 \times 30 \times 36 \times 54 \times 24 \cdot 09^2 + 60 \times 30 \times 42 \times 48 \times 4 \cdot 31^2 + 36 \times 54 \times 42 \times 48 \times 28 \cdot 40^2)}{60 \times 30 \times 36 \times 54 + 60 \times 30 \times 42 \times 48 + 36 \times 54 \times 42 \times 48}$$

$$= 21.82 \text{ secondes}$$

On remarquera que cette solution étend la solution adoptée pour une comparaison globale (par exemple $n_1, n_2, n_3/h_1 \times c_1$), mais n'a pas une valeur générale (notamment, il conviendrait de faire intervenir la pondération sur N si celle-ci n'était pas uniforme)

7.3.2 Résumé des analyses descriptives et inductive

L'analyse se poursuit de la manière habituelle pour une comparaison W/T/1. On calcule s, moyenne quadratique pondérée par les nombres de degrés de liberté des écarts-types-corrigés 24.58 (pour $n_1 h_1 / c_1$), 5.92 (pour $n_2 h_1 / c_1$), 12.74 (pour $n_3 h_1 / c_1$), 22.44 (pour $n_1 h_2 / c_1$), 14.38 (pour $n_2 h_2 / c_1$) et 9.93 (pour $n_3 h_2 / c_1$):

$$s = \frac{(9 \times 24.58^2 + 5 \times 5.92^2 + 6 \times 12.74^2 + 4 \times 22.44^2 + 8 \times 14.38^2 + 7 \times 9.93^2)}{9+5+6+4+8+7}$$

$$= 16.75 \text{ secondes}$$

On a ici le lien suivant avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance:

$$c_{m_1, n_2, n_3, h_1, h_2 / c_1} = 5071.33 = \frac{2131}{200} 1^2$$

(ici $k = 2131/200 = \frac{1}{2}(\frac{64}{3} - \frac{448}{300})$, où $64/3$ et $448/300$ sont respectivement la moyenne et la variance corrigée des trois quantités $\frac{60 \times 30}{60+30}$, $\frac{36 \times 54}{36+54}$ et $\frac{42 \times 48}{42+48}$)

$$c_{m_P(N \times H) / c_1} = 1683.73 = 6s^2$$

(6 est le nombre de traitements sur lesquels on a moyenné)

Analyse inductive - On a alors:

$$F_{\text{obs}} = \frac{1^2}{b s^2} = \frac{c_{m_1, n_2, n_3, h_1, h_2 / c_1}}{c_{m_P(N \times H) / c_1}} = 3.01$$

avec, ici, $b = \frac{6}{k} = \frac{1200}{2131}$ et avec $m = 2 \times 1 = 2$ et $q = 9+5+6+4+8+7 = 39$ degrés de liberté

$$e^2 = \frac{1^2}{m_P \text{ obs}} = 8.892$$

d'où notamment

$$1^* \sim 8.89^{1/2}, 39 \text{ (6.02)}$$

avec l'énoncé fiducio-bayésien (obtenu par programme)

$$P(1^* > 12.9) = 0.90$$

Ici la valeur observée $1 = 21.82$ secondes est très élevée. Le résultat du test de signification étant significatif au seuil observé $p = 0.061$ (calculé par programme) et la limite inférieure trouvée pour λ avec la garantie fiducio-bayésienne 0.90 étant également très élevée (12.9 secondes), on peut donc conclure inductivement à un effet d'interaction important entre les facteurs Nature des études et Sexe.

7.3.3 Choix d'un représentant de l'effet

En ce qui concerne le choix d'un représentant de l'effet observé, il s'agit ici de se donner deux contrastes d'interaction sur $N_3 \times H_2$, orthogonaux et de norme $1/\sqrt{k} = \sqrt{200/2131}$. On pourra vérifier que les deux contrastes suivants satisfont ces conditions (en ordonnant les modalités: $n_1 h_1$, $n_1 h_2$, $n_2 h_1$, $n_2 h_2$, $n_3 h_1$, $n_3 h_2$):

- Le contraste de coefficients (+c, -c, +c, 0, 0), avec $c = \sqrt{27000/27703}$;
- Le contraste de coefficients (+c, -c, +27c/25, -27c/25, -52c/25, +52c/25), avec $c = \sqrt{8750/27703}$.

On en déduit le représentant de l'effet observé correspondant à ce choix:

$$d = \begin{bmatrix} +23.78 \\ -19.66 \end{bmatrix} \text{ secondes}$$

qui est tel que

$$1 = \frac{(23.78^2 + 19.66^2)}{2} = 21.82 \text{ secondes}$$

* 7.4 ANALYSE DE LA COMPARAISON $n_1, n_2 \times h_1, h_2, E-LIN E/c_1$

La comparaison $n_1, n_2 \times h_1, h_2, E-LIN E/c_1$ fournit un exemple de comparaison à plusieurs degrés de liberté du type W.W dans le cas non-équilibré; cet exemple correspond à la situation la plus générale où V et W ont chacun plusieurs degrés de liberté, respectivement ici 3 et 4 (soit $12 = 3 \times 4$ degrés de liberté pour $n_1, n_2 \times h_1, h_2, E-LIN E/c_1$).

7.4.1 Caractérisation de la grandeur de l'effet observé

Le problème essentiel rencontré est ici encore celui du choix d'un indicateur de la grandeur de l'effet observé. Comme pour la comparaison analysée précédemment $n_1, n_2, n_3, E-LIN E/c_1$, on commencera par calculer les écarts entre la valeur correspondant à la droite de régression et la valeur observée, ceci ici pour chacune des modalités $n_{1h_1}, n_{1h_2}, n_{2h_1}, n_{2h_2}$:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
n_{1h_1}	-8.20	+4.90	+3.90	+5.80	-1.90	-4.50
n_{1h_2}	-4.68	+7.58	-10.76	+11.70	+1.95	-5.79
n_{2h_1}	-6.43	+2.08	+5.41	+2.59	+2.42	-6.07
n_{2h_2}	-4.55	+5.02	+3.81	-3.96	-0.83	+0.51

On caractérisera ensuite l'effet pour chacun des six essais: pour un essai donné, on est ramené au cas d'une comparaison globale du type W/π_1 et on prendra donc la moyenne quadratique des différences entre les écarts pris deux à deux, pondérée par les produits des deux effectifs associés à ces écarts. Pour chaque essai, il y a respectivement 10, 5, 6 et 9 observations pour $n_{1h_1}, n_{1h_2}, n_{2h_1}$ et n_{2h_2} ; pour e_1 par exemple, on aura donc les six différences:

$$\begin{aligned} |-8.20+4.68| &= 3.52 \\ |-8.20+6.43| &= 1.77 \\ |-8.20+4.55| &= 3.65 \\ |-4.68+6.43| &= 1.75 \\ |-4.68+4.55| &= 0.13 \\ |-6.43+4.55| &= 1.88 \end{aligned}$$

et leur moyenne quadratique pondérée

$$\sqrt{\frac{10 \times 5 \times 3 \cdot 52^2 + 10 \times 6 \times 1 \cdot 77^2 + 10 \times 9 \times 3 \cdot 65^2 + 5 \times 6 \times 1 \cdot 75^2 + 5 \times 9 \times 0 \cdot 13^2 + 6 \times 9 \times 1 \cdot 88^2}{10 \times 5 + 10 \times 6 + 10 \times 9 + 5 \times 6 + 5 \times 9 + 6 \times 9}} = 2.64$$

En procédant de la même manière pour chacun des six essais, on obtient les six valeurs:

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
2.64	2.76	9.30	9.02	2.97	4.49

Sur l'ensemble des six essais, on retiendra finalement comme indicateur de la grandeur de l'effet observé associé à la comparaison d'interaction $n_1, n_2 \times h_1, h_2, E-LIN E/c_1$, la moyenne quadratique des six valeurs précédentes:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 64^2 + 2 \cdot 76^2 + 9 \cdot 30^2 + 9 \cdot 02^2 + 2 \cdot 97^2 + 4 \cdot 49^2}{6}} = 5.93 \text{ secondes}$$

7.4.2 Résumé des analyses descriptives et inductives

L'analyse se poursuit de la manière habituelle pour une comparaison du type W/W . On calcule s , moyenne pondérée par les nombres de degrés de liberté des écarts-types-correctés, comme on le ferait pour la comparaison $E-LIN E/c_1$: ces écarts-types-correctés peuvent être calculés, soit à partir des grandeurs des effets individuels, soit à partir des représentants des effets individuels (on se reportera à l'analyse de la comparaison $E-LIN E/c_1$), pour chaque modalité $n_{1h_1}, n_{1h_2}, n_{2h_1}$ et n_{2h_2} ; on obtient ainsi $s_{n_{1h_1}} = 9.70$, $s_{n_{1h_2}} = 12.53$, $s_{n_{2h_1}} = 7.30$ et $s_{n_{2h_2}} = 9.64$, d'où:

$$s = \sqrt{\frac{9 \times 9.70^2 + 4 \times 12.53^2 + 5 \times 7.30^2 + 8 \times 9.64^2}{9+4+5+8}} = 9.77 \text{ secondes}$$

On a ici le lien suivant avec les statistiques usuelles de l'analyse de la variance:

$$c_{m_{n_1, n_2 \times h_1, h_2, E-LIN E/c_1}} = 193.06 = \frac{329}{60} \cdot 1^2$$

(ici $k = 329/60 = \frac{h}{329/90}$, où $329/90 = \frac{1 \cdot 15}{2} - \frac{17/3}{30}$), $15/2$ et $17/3$ étant respectivement la moyenne et la variance-correctée des effectifs 10, 5, 6, 9)

$$c_{m_{P(N \times H), E-LIN E/c_1}} = 143.30 = 1.5s^2$$

(ici $h = 1.5$, comme en 4.3.5 ou 4.4.3)

On obtient alors les procédures inférentielles de la même manière que dans le cas équilibré, notamment:

$$F_{\text{obs}} = \frac{1^2}{bs^2} = \frac{c_{m_{n_1, n_2 \times h_1, h_2, E-LIN E/c_1}}}{c_{m_{P(N \times H), E-LIN E/c_1}}} = 1.35$$

avec, ici, $b = \frac{h}{k} = 90/329$ et $m = 3 \times 4 = 12$ et $q = (9+4+5+8) \times 4 = 104$ degrés de liberté

La valeur observée $1 = 5.93$ secondes apparaît ici importante; mais le résultat du test de signification étant non-significatif (au seul observé $p = 0.20$, calculé par programme), on ne cherchera pas ici à prolonger inductivement ce résultat.

7.4.3 Choix d'un représentant de l'effet

Enfin, en ce qui concerne le problème du choix d'un représentant de l'effet observé, on pourra procéder comme pour la comparaison $n_1, n_2, n_3, E-LIN E/c_1$ (cf 4.5.2), en choisissant par exemple les trois contrastes sur $n_1, n_2 \times h_1, h_2$ de coefficients respectifs $(+c, -c, 0, 0)$ avec $c = \sqrt{300/329}$, $(0, 0, +c, -c)$ avec $c = \sqrt{324/329}$ et $(+10c, +5c, -6c, -9c)$ avec $c = \sqrt{3/329}$. On obtient alors le

1 TABLES POUR LA DISTRIBUTION $t_q(d, e^2)$

* 1.1 DENSITE

La table I donne la densité de la distribution $t_q(d, e^2)$ et permet donc d'effectuer le tracé de la courbe correspondante. Nous donnons ci-après deux exemples de son utilisation.

1.1.1 Premier exemple

Dans l'analyse de la comparaison $e_1, e_6/c_1$, la distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre δ est:

$$\parallel t_{28} (+10.95, 1.00^2)$$

Dans ce cas la valeur particulière trouvée pour e (avec deux décimales $e = 1.00$) conduit à lire directement la densité dans la table pour la ligne correspondant à $q = 28$ degrés de liberté: on obtient ainsi la densité aux points $d = +10.95$, $d+0.25e = +11.20$, $d-0.25e = +10.70$, $d+0.50e = +11.45$, etc., d'où la liste ci-après à partir de laquelle on tracera aisément la courbe sur du papier millimétré (en choisissant une échelle convenable):

point: +7.95	+8.20	+8.45	+8.70	+8.95
densité: 0.007	0.012	0.021	0.036	0.057
point: +9.20	+9.45	+9.70	+9.95	+10.20
densité: 0.088	0.129	0.180	0.238	0.296
point: +10.45	+10.70	+10.95	+11.20	+11.45
densité: 0.348	0.383	0.395	0.383	0.348
point: +11.70	+11.95	+12.20	+12.45	+12.70
densité: 0.296	0.238	0.180	0.129	0.088
point: +12.95	+13.20	+13.45	+13.70	+13.95
densité: 0.057	0.036	0.021	0.012	0.007

1.1.2 Deuxième exemple

Dans l'analyse de la comparaison n_1, n_2 , la distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre δ est:

$$\parallel t_{28} (+4.66, 4.90^2)$$

Dans ce cas il convient de diviser la valeur lue dans la table - la même que dans le premier exemple puisque l'on a encore $q = 28$ - par $e = 4.90$. On obtient ainsi la densité aux points $d = +4.66$, $d+0.25e = +5.89$, $d-0.25e = +3.44$, $d+0.50e = +7.11$, etc., d'où la liste ci-après qui permettra de tracer la courbe:

point:	-10.04	-8.82	-7.59	-6.37	-5.14
densité:	0.001	0.002	0.004	0.007	0.012
point:	-3.92	-2.69	-1.47	-0.24	+0.99
densité:	0.018	0.026	0.037	0.049	0.060
point:	+2.21	+3.44	+4.66	+5.89	+7.11
densité:	0.071	0.078	0.081	0.078	0.071
point:	+8.34	+9.56	+10.79	+12.01	+13.24
densité:	0.060	0.049	0.037	0.026	0.018
point:	+14.46	+15.69	+16.91	+18.14	+19.36
densité:	0.012	0.007	0.004	0.002	0.001

Bien entendu les courbes des deux exemples se déduisent l'une de l'autre par un changement d'origine (ou de centre) et d'échelle (" t " (d, e^2) = $d + et$ " γ ").

* 1.2 INFERENCE SUR L'EFFET D'UN CONTRASTE: RECHERCHE DE CONCLUSION D'EFFET NOTABLE

La table II permet d'obtenir pour l'inférence (fiducio-bayésienne, bayésienne ou prédictive) sur l'effet d'un contraste une conclusion d'effet notable correspondant à la garantie $\gamma = 0.90, 0.95$ ou 0.99 . Elle donne pour cela un énoncé du type $P(\delta > ?) = \gamma$ si $d > 0$ ou du type $P(\delta < ?) = \gamma$ si $d < 0$.

1.2.1 Premier exemple

Dans l'analyse de la comparaison $e1, e6/c1$, la distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre δ est

$$\parallel t_{28} (+10.95, 1.00^2)$$

Ici $d = +10.95$ est positif, et, pour la ligne correspondant à $q = 28$ et la colonne correspondant à la garantie $\gamma = 0.90$, on lit que la probabilité que δ soit supérieur à $d - 1.313e$ est égale à 0.90 ; on calcule $+10.95 - 1.313 \times 1.00 = +9.6$, d'où

$$\parallel P(\delta^* > +9.6) = 0.90$$

On trouverait de la même manière, pour les garanties 0.95 et 0.99 , les deux énoncés

$$\parallel P(\delta^* > +9.2) = 0.95$$

$$\parallel P(\delta^* > +8.5) = 0.99$$

1.2.2 Deuxième exemple

Dans l'analyse de la comparaison $c1, c2, e1, e6, n1, n2$, la distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre δ est

$$\parallel t_{28} (-1.45, 2.30^2)$$

Ici $d = -1.45$ est négatif, et on lit, par exemple, que la probabilité que δ soit inférieur à $d + 1.313e$ est égale à 0.90 ; $-1.45 + 1.313 \times 2.30 = +1.6$, d'où

$$\parallel P(\delta^* < +1.6) = 0.90$$

Cet énoncé montre bien que l'on ne peut pas ici énoncer une conclusion d'effet notable pour la garantie 0.90 , la limite $+1.6$ étant de signe opposé à l'effet observé d .

* 1.3 INFERENCE SUR L'EFFET D'UN CONTRASTE: RECHERCHE DE CONCLUSION D'EFFET NEGLIGEABLE

La table III permet d'obtenir pour l'inférence (fiducio-bayésienne, bayésienne ou prédictive) sur l'effet d'un contraste une conclusion d'effet négligeable correspondant à la garantie $\gamma = 0.90$. Elle donne pour cela un énoncé du type $P(|\delta| < |d| + ?) = \gamma$.

1.3.1 Premier exemple

Dans l'analyse de la comparaison $n1, n2$, la distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre δ est

$$\parallel t_{28} (+4.66, 4.90^2)$$

La limite cherchée dépend de la valeur du rapport $|d|/e = 0.95$ (on notera que pour la distribution fiducio-bayésienne $|d|/e$ n'est autre que la valeur absolue de t_{obs}). Pour la colonne correspondant à 0.95 et pour la ligne correspondant à $q = 28$, on lit que la probabilité que δ soit inférieur en valeur absolue à $|d| + 1.322e$ est égale à 0.90 ; on calcule $4.66 + 1.322 \times 4.90 = 11.1$, d'où

$$\parallel P(|\delta^*| < 11.1) = 0.90$$

1.3.2 Deuxième exemple

Dans l'analyse de la comparaison $c1, c2, e1, e6, n1, n2$, la distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre δ est

$$\parallel t_{28} (-1.45, 2.30^2)$$

Ici le rapport $|d|/e$ vaut 0.63 ; cette valeur ne figure pas dans la table, mais la limite cherchée est encadrée par les limites $|d| + 1.362e$, lue dans la colonne correspondant à 0.60 et $|d| + 1.353e$, lue dans la colonne correspondant à 0.65 . On calcule $1.45 + 1.362 \times 2.30 = 4.583$ et $1.45 + 1.353 \times 2.30 = 4.562$, d'où si l'on retient une seule décimale

$$\parallel P(|\delta^*| < 4.6) = 0.90$$

Si l'on désire obtenir deux décimales, on peut procéder par interpolation linéaire, d'où la limite $4.562 + \frac{2}{5}(4.583 - 4.562) = 4.57$:

$$\| P(|\delta^*| < 4.57) = 0.90$$

* *
* *

2 TABLES POUR LA DISTRIBUTION $s\phi_q^{-1}$

* 2.1 DENSITE

La table IV donne la densité de la distribution $s\phi_q^{-1}$ pour les valeurs de q usuelles et permet donc d'effectuer le tracé de la courbe correspondante.

Par exemple, dans l'analyse de la comparaison $e1, e6/c1$, la distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre σ est:

$$\| 5.46\phi_{28}^{-1}$$

Pour la ligne correspondant à $q = 28$ degrés de liberté, la table donne la densité aux points $0.62s = 3.39$, $0.65s = 3.55$, $0.70s = 3.82$, etc., en divisant la valeur lue dans la table par $s = 5.46$. On obtient ainsi la liste ci-après, à partir de laquelle on tracera aisément la courbe sur du papier millimétré (en choisissant une échelle convenable):

point:	3.39	3.55	3.82	4.10	4.37	4.64
densité:	<0.001	0.001	0.008	0.043	0.134	0.280
point:	4.91	5.37	5.46	6.01	6.28	6.55
densité:	0.432	0.548	0.544	0.389	0.287	0.198
point:	7.10	7.64	8.19	8.74	10.43	
densité:	0.082	0.030	0.010	0.004	<0.001	

* 2.2 INFERENCE RELATIVE AU PARAMETRE σ : RECHERCHE D'UNE LIMITE SUPERIEURE

La table V donne la limite supérieure pour la distribution $s\phi_q^{-1}$ correspondant à la garantie $\gamma = 0.90$, 0.95 ou 0.99 ; ceci correspond à un énoncé du type $P(\sigma < ?) = \gamma$.

Par exemple, dans l'analyse de la comparaison $e1, e6/c1$, la distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre σ est

$$\| 5.46\phi_{28}^{-1}$$

Pour la ligne correspondant à $q = 28$, la limite supérieure correspondant à la garantie $\gamma = 0.90$ est lue égale à $1.216s$, soit $1.216 \times 5.46 = 6.64$, d'où

$$\| P(\sigma < 6.64) = 0.90$$

On trouverait de la même manière les limites supérieures correspondant aux garanties 0.95 et 0.99 , d'où respectivement

$$\| P(\sigma < 7.02) = 0.95$$

$$\| P(\sigma < 7.85) = 0.99$$

* 2.3 INFERENCE RELATIVE AU PARAMETRE σ : RECHERCHE D'UNE LIMITE INFÉRIEURE

La table VI donne la limite inférieure pour la distribution s_q^{-1} correspondant à la garantie $\gamma = 0.90, 0.95$ ou 0.99 ; ceci correspond à un énoncé du type $P(\sigma > \gamma) = \gamma$.

Par exemple, dans l'analyse de la comparaison $c_1, c_2/e_1$, la distribution fiducio-bayésienne relative au paramètre σ est

$$\parallel 31.91 \phi_{28}^{-1}$$

Pour la ligne correspondant à $q = 28$, la limite inférieure correspondant à la garantie $\gamma = 0.90$ est égale à $0.859s$, soit $0.859 \times 31.91 = 27.4$, d'où

$$\parallel P(\sigma > 27.4) = 0.90$$

On trouverait de la même manière les limites inférieures correspondant aux garanties 0.95 et 0.99 , d'où respectivement

$$\parallel P(\sigma > 26.3) = 0.95$$

$$\parallel P(\sigma > 24.3) = 0.99$$

* * *

Table I - Densité de la distribution $t(d, e^2)$ - Pour obtenir la densité aux points $d, d+0.25e$ et $d-0.25e, d+0.50e$ et $d-0.50e, \dots$, diviser la valeur lue dans la table (pour la ligne q) par e .

d	d±0.25e	d±0.50e	d±0.75e	d±e	d±1.25e	d±1.50e	d±1.75e	d±2e	d±2.25e	d±2.50e	d±2.75e	d±3e
0.354	0.338	0.296	0.244	0.192	0.149	0.114	0.088	0.068	0.053	0.042	0.034	0.027
0.368	0.353	0.313	0.261	0.207	0.159	0.120	0.090	0.068	0.051	0.039	0.030	0.023
0.375	0.361	0.322	0.270	0.215	0.164	0.123	0.091	0.066	0.049	0.036	0.026	0.020
0.380	0.366	0.328	0.276	0.220	0.168	0.125	0.091	0.065	0.047	0.033	0.024	0.017
0.383	0.369	0.332	0.280	0.223	0.170	0.126	0.090	0.064	0.045	0.031	0.022	0.015
0.385	0.372	0.335	0.283	0.226	0.172	0.126	0.090	0.063	0.044	0.030	0.021	0.014
0.387	0.373	0.337	0.285	0.228	0.173	0.127	0.090	0.062	0.043	0.029	0.019	0.013
0.388	0.375	0.338	0.287	0.229	0.174	0.127	0.090	0.062	0.042	0.028	0.018	0.012
0.389	0.376	0.340	0.288	0.230	0.175	0.127	0.090	0.061	0.041	0.027	0.018	0.011
1 0.390	0.377	0.341	0.289	0.231	0.176	0.128	0.089	0.061	0.040	0.026	0.017	0.011
2 0.391	0.378	0.342	0.290	0.232	0.176	0.128	0.089	0.060	0.040	0.026	0.016	0.010
3 0.391	0.378	0.342	0.291	0.233	0.177	0.128	0.089	0.060	0.039	0.025	0.016	0.010
4 0.392	0.379	0.343	0.292	0.234	0.177	0.128	0.089	0.060	0.039	0.025	0.015	0.009
5 0.392	0.380	0.344	0.292	0.234	0.178	0.128	0.089	0.059	0.038	0.024	0.015	0.009
6 0.393	0.380	0.344	0.293	0.235	0.178	0.128	0.089	0.059	0.038	0.024	0.015	0.009
7 0.393	0.380	0.345	0.293	0.235	0.178	0.128	0.089	0.059	0.038	0.023	0.014	0.009
8 0.393	0.381	0.345	0.294	0.235	0.178	0.129	0.088	0.058	0.037	0.023	0.014	0.008
9 0.394	0.381	0.345	0.294	0.236	0.179	0.129	0.088	0.058	0.037	0.023	0.014	0.008
0 0.394	0.381	0.346	0.294	0.236	0.179	0.129	0.088	0.058	0.037	0.023	0.014	0.008
1 0.394	0.382	0.346	0.295	0.236	0.179	0.129	0.088	0.058	0.036	0.022	0.013	0.008
2 0.394	0.382	0.346	0.295	0.237	0.179	0.129	0.088	0.058	0.036	0.022	0.013	0.008
3 0.395	0.382	0.347	0.295	0.237	0.179	0.129	0.088	0.058	0.036	0.022	0.013	0.008
4 0.395	0.382	0.347	0.296	0.237	0.179	0.129	0.088	0.057	0.036	0.022	0.013	0.007
5 0.395	0.382	0.347	0.296	0.237	0.180	0.129	0.088	0.057	0.036	0.022	0.013	0.007
6 0.395	0.383	0.347	0.296	0.237	0.180	0.129	0.088	0.057	0.036	0.022	0.013	0.007
7 0.395	0.383	0.347	0.296	0.238	0.180	0.129	0.088	0.057	0.036	0.021	0.012	0.007
8 0.395	0.383	0.348	0.296	0.238	0.180	0.129	0.088	0.057	0.036	0.021	0.012	0.007
9 0.396	0.383	0.348	0.296	0.238	0.180	0.129	0.088	0.057	0.035	0.021	0.012	0.007
0 0.396	0.383	0.348	0.297	0.238	0.180	0.129	0.088	0.057	0.035	0.021	0.012	0.007
5 0.396	0.384	0.348	0.297	0.239	0.180	0.129	0.088	0.056	0.035	0.021	0.012	0.006
0 0.396	0.384	0.349	0.298	0.239	0.181	0.129	0.087	0.056	0.034	0.020	0.011	0.006
5 0.397	0.384	0.349	0.298	0.239	0.181	0.129	0.087	0.056	0.034	0.020	0.011	0.006
0 0.397	0.385	0.350	0.298	0.240	0.181	0.129	0.087	0.056	0.034	0.020	0.011	0.006
00 0.398	0.386	0.351	0.300	0.241	0.182	0.129	0.087	0.055	0.033	0.019	0.010	0.005
00 0.398	0.386	0.351	0.300	0.241	0.182	0.129	0.087	0.054	0.032	0.018	0.010	0.005
0 0.399	0.387	0.352	0.301	0.242	0.183	0.130	0.086	0.054	0.032	0.018	0.009	0.004

Table II - Distribution $t_q(d, e^2)$: inférence sur l'effet d'un contraste, recherche de conclusion d'effet notable.

q	d négatif			d positif		
	$\gamma=0.99$	$\gamma=0.95$	$\gamma=0.90$	$\gamma=0.90$	$\gamma=0.95$	$\gamma=0.99$
q=2	d+6.965e	d+2.920e	d+1.886e	d-1.886e	d-2.920e	d-6.965e
q=3	d+4.541e	d+2.353e	d+1.638e	d-1.638e	d-2.353e	d-4.541e
q=4	d+3.747e	d+2.132e	d+1.533e	d-1.533e	d-2.132e	d-3.747e
q=5	d+3.365e	d+2.015e	d+1.476e	d-1.476e	d-2.015e	d-3.365e
q=6	d+3.143e	d+1.943e	d+1.440e	d-1.440e	d-1.943e	d-3.143e
q=7	d+2.998e	d+1.895e	d+1.415e	d-1.415e	d-1.895e	d-2.998e
q=8	d+2.896e	d+1.860e	d+1.397e	d-1.397e	d-1.860e	d-2.896e
q=9	d+2.821e	d+1.833e	d+1.383e	d-1.383e	d-1.833e	d-2.821e
q=10	d+2.764e	d+1.812e	d+1.372e	d-1.372e	d-1.812e	d-2.764e
q=11	d+2.718e	d+1.796e	d+1.363e	d-1.363e	d-1.796e	d-2.718e
q=12	d+2.681e	d+1.782e	d+1.356e	d-1.356e	d-1.782e	d-2.681e
q=13	d+2.650e	d+1.771e	d+1.350e	d-1.350e	d-1.771e	d-2.650e
q=14	d+2.624e	d+1.761e	d+1.345e	d-1.345e	d-1.761e	d-2.624e
q=15	d+2.602e	d+1.753e	d+1.341e	d-1.341e	d-1.753e	d-2.602e
q=16	d+2.583e	d+1.746e	d+1.337e	d-1.337e	d-1.746e	d-2.583e
q=17	d+2.567e	d+1.740e	d+1.333e	d-1.333e	d-1.740e	d-2.567e
q=18	d+2.552e	d+1.734e	d+1.330e	d-1.330e	d-1.734e	d-2.552e
q=19	d+2.539e	d+1.729e	d+1.328e	d-1.328e	d-1.729e	d-2.539e
q=20	d+2.528e	d+1.725e	d+1.325e	d-1.325e	d-1.725e	d-2.528e
q=21	d+2.518e	d+1.721e	d+1.323e	d-1.323e	d-1.721e	d-2.518e
q=22	d+2.508e	d+1.717e	d+1.321e	d-1.321e	d-1.717e	d-2.508e
q=23	d+2.500e	d+1.714e	d+1.319e	d-1.319e	d-1.714e	d-2.500e
q=24	d+2.493e	d+1.711e	d+1.318e	d-1.318e	d-1.711e	d-2.493e
q=25	d+2.487e	d+1.708e	d+1.316e	d-1.316e	d-1.708e	d-2.487e
q=26	d+2.479e	d+1.706e	d+1.315e	d-1.315e	d-1.706e	d-2.479e
q=27	d+2.473e	d+1.703e	d+1.314e	d-1.314e	d-1.703e	d-2.473e
q=28	d+2.466e	d+1.701e	d+1.313e	d-1.313e	d-1.701e	d-2.466e
q=29	d+2.460e	d+1.699e	d+1.311e	d-1.311e	d-1.699e	d-2.460e
q=30	d+2.454e	d+1.697e	d+1.310e	d-1.310e	d-1.697e	d-2.454e
q=35	d+2.438e	d+1.690e	d+1.306e	d-1.306e	d-1.690e	d-2.438e
q=40	d+2.423e	d+1.684e	d+1.303e	d-1.303e	d-1.684e	d-2.423e
q=45	d+2.412e	d+1.678e	d+1.301e	d-1.301e	d-1.678e	d-2.412e
q=50	d+2.403e	d+1.676e	d+1.299e	d-1.299e	d-1.676e	d-2.403e
q=55	d+2.396e	d+1.673e	d+1.297e	d-1.297e	d-1.673e	d-2.396e
q=60	d+2.390e	d+1.671e	d+1.296e	d-1.296e	d-1.671e	d-2.390e
q=70	d+2.374e	d+1.664e	d+1.292e	d-1.292e	d-1.664e	d-2.374e
q=80	d+2.369e	d+1.662e	d+1.291e	d-1.291e	d-1.662e	d-2.369e
q=90	d+2.364e	d+1.660e	d+1.290e	d-1.290e	d-1.660e	d-2.364e
q=100	d+2.354e	d+1.655e	d+1.287e	d-1.287e	d-1.655e	d-2.354e
q=150	d+2.351e	d+1.653e	d+1.286e	d-1.286e	d-1.653e	d-2.351e
q=200	d+2.326e	d+1.645e	d+1.282e	d-1.282e	d-1.645e	d-2.326e

La probabilité que δ soit inférieur à la valeur donnée par la table est égale à γ

La probabilité que δ soit supérieur à la valeur donnée par la table est égale à γ

Table III - Distribution $t_q(d, e^2)$: inférence sur l'effet d'un contraste, recherche de conclusion d'effet négligeable (avec la garantie 0.90)

q	La probabilité que $ \delta $ soit inférieur à $ \delta $ plus la valeur donnée par la table est égale à 0.90										
	La valeur cherchée dépend du rapport $\frac{ \delta }{e}$										
	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
q=2	2.920e	2.871e	2.824e	2.779e	2.737e	2.696e	2.657e	2.620e	2.585e	2.552e	2.520e
q=3	2.353e	2.305e	2.259e	2.216e	2.175e	2.137e	2.102e	2.069e	2.038e	2.010e	1.984e
q=4	2.132e	2.083e	2.038e	1.996e	1.957e	1.920e	1.887e	1.856e	1.827e	1.801e	1.778e
q=5	2.015e	1.967e	1.922e	1.880e	1.841e	1.806e	1.774e	1.744e	1.717e	1.693e	1.671e
q=6	1.943e	1.895e	1.850e	1.809e	1.771e	1.736e	1.704e	1.675e	1.649e	1.626e	1.605e
q=7	1.895e	1.846e	1.802e	1.761e	1.723e	1.688e	1.657e	1.629e	1.604e	1.581e	1.561e
q=8	1.860e	1.811e	1.767e	1.726e	1.688e	1.654e	1.624e	1.596e	1.571e	1.549e	1.529e
q=9	1.833e	1.785e	1.739e	1.700e	1.662e	1.629e	1.598e	1.571e	1.546e	1.525e	1.506e
q=10	1.812e	1.764e	1.720e	1.679e	1.642e	1.609e	1.578e	1.551e	1.527e	1.506e	1.487e
q=11	1.796e	1.748e	1.703e	1.663e	1.626e	1.592e	1.562e	1.535e	1.512e	1.491e	1.472e
q=12	1.782e	1.734e	1.690e	1.649e	1.612e	1.579e	1.549e	1.523e	1.499e	1.478e	1.459e
q=13	1.771e	1.723e	1.679e	1.638e	1.601e	1.568e	1.538e	1.512e	1.488e	1.468e	1.450e
q=14	1.761e	1.713e	1.669e	1.628e	1.592e	1.559e	1.529e	1.503e	1.479e	1.459e	1.441e
q=15	1.753e	1.705e	1.661e	1.620e	1.584e	1.551e	1.521e	1.495e	1.472e	1.452e	1.434e
q=16	1.746e	1.698e	1.654e	1.613e	1.577e	1.544e	1.514e	1.488e	1.465e	1.445e	1.428e
q=17	1.740e	1.692e	1.647e	1.607e	1.571e	1.538e	1.508e	1.482e	1.459e	1.439e	1.422e
q=18	1.734e	1.686e	1.642e	1.602e	1.565e	1.532e	1.503e	1.477e	1.454e	1.434e	1.417e
q=19	1.729e	1.681e	1.637e	1.597e	1.560e	1.527e	1.498e	1.472e	1.450e	1.430e	1.413e
q=20	1.725e	1.677e	1.633e	1.592e	1.556e	1.523e	1.494e	1.468e	1.446e	1.426e	1.409e
q=21	1.721e	1.673e	1.629e	1.588e	1.552e	1.519e	1.490e	1.464e	1.442e	1.422e	1.405e
q=22	1.717e	1.669e	1.625e	1.584e	1.548e	1.516e	1.487e	1.461e	1.439e	1.419e	1.402e
q=23	1.714e	1.666e	1.622e	1.582e	1.545e	1.513e	1.484e	1.458e	1.436e	1.416e	1.399e
q=24	1.711e	1.663e	1.619e	1.579e	1.542e	1.510e	1.481e	1.455e	1.433e	1.413e	1.396e
q=25	1.708e	1.660e	1.616e	1.576e	1.540e	1.507e	1.478e	1.452e	1.430e	1.410e	1.393e
q=26	1.706e	1.658e	1.614e	1.574e	1.537e	1.505e	1.476e	1.450e	1.428e	1.408e	1.391e
q=27	1.703e	1.655e	1.611e	1.571e	1.534e	1.502e	1.473e	1.447e	1.425e	1.405e	1.388e
q=28	1.701e	1.653e	1.609e	1.569e	1.533e	1.500e	1.471e	1.445e	1.423e	1.403e	1.386e
q=29	1.699e	1.651e	1.607e	1.567e	1.531e	1.498e	1.469e	1.443e	1.421e	1.401e	1.384e
q=30	1.697e	1.649e	1.605e	1.565e	1.529e	1.496e	1.467e	1.441e	1.419e	1.399e	1.382e
q=35	1.690e	1.642e	1.598e	1.558e	1.522e	1.489e	1.460e	1.434e	1.412e	1.392e	1.375e
q=40	1.684e	1.636e	1.592e	1.552e	1.516e	1.483e	1.454e	1.428e	1.406e	1.386e	1.369e
q=45	1.680e	1.631e	1.587e	1.548e	1.511e	1.478e	1.449e	1.423e	1.401e	1.381e	1.364e
q=50	1.676e	1.628e	1.584e	1.544e	1.508e	1.475e	1.446e	1.420e	1.400e	1.380e	1.363e
q=55	1.673e	1.625e	1.581e	1.541e	1.505e	1.472e	1.443e	1.417e	1.397e	1.377e	1.360e
q=60	1.671e	1.623e	1.579e	1.539e	1.503e	1.470e	1.441e	1.415e	1.395e	1.375e	1.358e
q=70	1.667e	1.619e	1.575e	1.535e	1.499e	1.467e	1.438e	1.412e	1.392e	1.372e	1.355e
q=80	1.664e	1.616e	1.572e	1.532e	1.496e	1.464e	1.435e	1.409e	1.389e	1.369e	1.352e
q=90	1.662e	1.614e	1.570e	1.530e	1.494e	1.462e	1.433e	1.407e	1.387e	1.367e	1.350e
q=100	1.660e	1.612e	1.568e	1.528e	1.492e	1.460e	1.431e	1.405e	1.385e	1.365e	1.348e
q=150	1.655e	1.607e	1.563e	1.523e	1.487e	1.455e	1.426e	1.400e	1.380e	1.360e	1.343e
q=200	1.653e	1.605e	1.561e	1.521e	1.485e	1.453e	1.424e	1.400e	1.379e	1.359e	1.342e

Table IV - Densité de la distribution $s\phi_q^{-1}$ - Pour chaque valeur de q, on obtiendra la densité aux points donnés dans la ligne supérieure en divisant la valeur lue dans la ligne inférieure (en italique) par s.

0.29s	0.40s	0.50s	0.60s	0.70s	0.80s	0.816s	0.90s	1.00s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	3.00s	4.00s	15.85s
0.001	0.060	0.293	0.576	0.758	0.819	0.820	0.798	0.736	0.578	0.436	0.330	0.252	0.195	0.066	0.029	0.001
0.34s	0.40s	0.50s	0.60s	0.70s	0.80s	0.866s	0.90s	1.00s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	3.00s	4.00s	9.50s
0.001	0.014	0.164	0.496	0.809	0.971	0.997	0.992	0.925	0.706	0.502	0.352	0.249	0.178	0.043	0.015	0.001
0.37s	0.40s	0.50s	0.60s	0.70s	0.80s	0.894s	0.90s	1.00s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	3.00s	4.00s	6.87s
0.001	0.003	0.086	0.398	0.803	1.073	1.147	1.147	1.083	0.802	0.536	0.349	0.228	0.152	0.026	0.007	0.001
0.40s	0.50s	0.60s	0.70s	0.80s	0.90s	0.913s	1.00s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	2.50s	3.00s	4.00s	5.48s
0.001	0.043	0.307	0.769	1.141	1.278	1.279	1.220	0.877	0.551	0.334	0.202	0.124	0.041	0.015	0.003	0.001
0.43s	0.50s	0.60s	0.70s	0.80s	0.90s	0.926s	1.00s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	2.50s	3.00s	3.50s	4.64s
0.001	0.021	0.232	0.719	1.186	1.390	1.398	1.344	0.938	0.554	0.312	0.175	0.100	0.027	0.009	0.003	0.001
0.45s	0.50s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.90s	0.935s	1.00s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	3.00s	4.09s
0.001	0.010	0.172	0.383	0.662	0.957	1.213	1.508	1.490	1.458	0.988	0.548	0.286	0.149	0.079	0.005	0.001
0.46s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.943s	1.00s	1.10s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	3.69s
0.001	0.127	0.319	0.603	0.927	1.227	1.452	1.579	1.611	1.563	1.327	1.028	0.537	0.260	0.125	0.061	0.001
0.48s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.949s	1.00s	1.10s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	3.39s
0.001	0.092	0.263	0.544	0.891	1.231	1.499	1.658	1.707	1.662	1.399	1.061	0.521	0.235	0.104	0.047	0.001
0.49s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.953s	1.00s	1.10s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	3.16s
0.001	0.067	0.216	0.488	0.850	1.227	1.537	1.730	1.798	1.755	1.465	1.000	0.502	0.210	0.087	0.036	0.001
0.50s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.957s	1.00s	1.10s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	2.97s
0.001	0.048	0.176	0.435	0.807	1.216	1.567	1.796	1.884	1.843	1.525	1.110	0.481	0.187	0.071	0.028	0.001
0.52s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.961s	1.00s	1.10s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	2.82s
0.001	0.034	0.143	0.386	0.763	1.200	1.591	1.856	1.967	1.927	1.582	1.127	0.459	0.166	0.059	0.021	0.001
0.53s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.964s	1.00s	1.10s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	2.70s
0.001	0.025	0.116	0.341	0.718	1.179	1.610	1.911	2.046	2.008	1.634	1.140	0.436	0.146	0.048	0.016	0.001
0.54s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.966s	1.00s	1.10s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	2.59s
0.001	0.017	0.093	0.301	0.674	1.156	1.623	1.961	2.123	2.086	1.683	1.150	0.413	0.129	0.039	0.012	0.001
0.54s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.968s	1.00s	1.10s	1.20s	1.40s	1.60s	1.80s	2.00s	2.50s
0.001	0.012	0.075	0.265	0.631	1.130	1.633	2.008	2.196	2.161	1.728	1.156	0.391	0.113	0.032	0.009	0.001

Table IV (suite)

0.55s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.970s	1.00s	1.10s	1.20s	1.30s	1.40s	1.60s	1.80s	2.42s
0.001	0.009	0.060	0.232	0.590	1.102	1.638	2.051	2.268	2.233	1.771	1.160	0.677	0.369	0.099	0.026	0.001
0.56s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.972s	1.00s	1.10s	1.20s	1.30s	1.40s	1.60s	1.80s	2.35s
0.001	0.006	0.048	0.203	0.550	1.072	1.641	2.090	2.337	2.304	1.811	1.162	0.659	0.347	0.087	0.021	0.001
0.57s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.973s	1.00s	1.10s	1.20s	1.30s	1.40s	1.60s	1.80s	2.29s
0.001	0.004	0.039	0.178	0.511	1.042	1.640	2.126	2.404	2.372	1.849	1.161	0.640	0.326	0.076	0.017	0.001
0.58s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.975s	1.00s	1.10s	1.20s	1.30s	1.40s	1.60s	1.80s	2.23s
0.001	0.003	0.031	0.155	0.475	1.101	1.637	2.160	2.470	2.438	1.884	1.159	0.620	0.306	0.066	0.014	0.001
0.58s	0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.976s	1.00s	1.10s	1.20s	1.30s	1.40s	1.60s	1.80s	2.18s
0.001	0.002	0.025	0.135	0.441	0.978	1.631	2.190	2.533	2.502	1.918	1.155	0.601	0.130	0.057	0.011	0.001
0.59s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.977s	1.00s	1.10s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.60s	1.80s	2.14s
0.001	0.020	0.118	0.408	0.946	1.623	2.219	2.595	2.565	1.949	1.149	0.581	0.268	0.117	0.050	0.009	0.001
0.59s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.978s	1.00s	1.10s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.60s	1.80s	2.10s
0.001	0.016	0.102	0.378	0.914	1.614	2.245	2.656	2.626	1.979	1.143	0.561	0.250	0.106	0.043	0.007	0.001
0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.979s	1.00s	1.10s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.60s	1.80s	2.06s
0.001	0.012	0.089	0.349	0.882	1.603	2.269	2.715	2.686	2.007	1.135	0.542	0.234	0.095	0.037	0.006	0.001
0.60s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.980s	1.00s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.60s	2.02s
0.001	0.010	0.077	0.323	0.851	1.590	2.291	2.773	2.745	2.033	1.556	1.126	0.522	0.218	0.085	0.032	0.001
0.61s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.981s	1.00s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.60s	1.99s
0.001	0.008	0.067	0.298	0.819	1.576	2.311	2.830	2.802	2.058	1.560	1.116	0.503	0.203	0.077	0.028	0.001
0.61s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.981s	1.00s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40	1.50s	1.60s	1.96s
0.001	0.006	0.058	0.274	0.789	1.561	2.329	2.886	2.858	2.082	1.563	1.105	0.484	0.189	0.069	0.024	0.001
0.62s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.982s	1.00s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.60s	1.94s
0.001	0.005	0.050	0.253	0.759	1.545	2.346	2.940	2.914	2.104	1.565	1.093	0.465	0.176	0.062	0.021	0.001
0.62s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.983s	1.00s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.60s	1.91s
0.001	0.004	0.043	0.233	0.729	1.528	2.361	2.994	2.968	2.125	1.566	1.081	0.447	0.163	0.055	0.018	0.001
0.63s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.983s	1.00s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.60s	1.89s
0.001	0.003	0.037	0.214	0.700	1.510	2.375	3.047	3.021	2.144	1.566	1.069	0.429	0.152	0.050	0.016	0.001
0.63s	0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.984s	1.00s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.60s	1.87s
0.001	0.002	0.032	0.197	0.672	1.491	2.388	3.099	3.073	2.163	1.565	1.056	0.412	0.141	0.044	0.013	0.001
0.64s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.984s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.60s	1.85s
0.001	0.028	0.181	0.645	1.472	2.399	3.149	3.124	2.770	2.180	1.563	1.042	0.395	0.131	0.040	0.012	0.001

Table IV (suite)

314

0.64s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.985s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.60s	1.83s
0.001	0.024	0.166	0.618	1.452	2.409	3.200	3.175	2.809	2.197	1.560	1.028	0.379	0.121	0.036	0.010	0.001
0.64s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.985s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.60s	1.81s
0.001	0.021	0.152	0.592	1.432	2.417	3.249	3.225	2.846	2.212	1.557	1.014	0.363	0.112	0.032	0.009	0.001
0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.95s	0.986s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.79s
0.001	0.018	0.140	0.567	1.412	2.425	3.141	3.298	3.274	2.883	2.227	1.552	0.999	0.348	0.104	0.028	0.001
0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.95s	0.986s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.78s
0.001	0.015	0.128	0.543	1.391	2.432	3.179	3.346	3.322	2.919	2.240	1.547	0.984	0.333	0.096	0.025	0.001
0.65s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.95s	0.986s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.76s
0.001	0.013	0.118	0.520	1.370	2.437	3.216	3.392	3.370	2.954	2.253	1.542	0.969	0.319	0.089	0.023	0.001
0.66s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.95s	0.987s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.75s
0.001	0.011	0.108	0.497	1.348	2.442	3.252	3.439	3.416	2.988	2.265	1.536	0.954	0.305	0.082	0.020	0.001
0.66s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.95s	0.987s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.73s
0.001	0.010	0.099	0.476	1.327	2.446	3.287	3.485	3.463	3.021	2.276	1.529	0.939	0.291	0.076	0.018	0.001
0.66s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.95s	0.987s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.72s
0.001	0.008	0.090	0.455	1.305	2.449	3.321	3.531	3.508	3.054	2.287	1.522	0.924	0.279	0.070	0.016	0.001
0.67s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.95s	0.988s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.71s
0.001	0.007	0.083	0.435	1.283	2.451	3.354	3.576	3.553	3.086	2.296	1.514	0.908	0.266	0.065	0.014	0.001
0.68s	0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.95s	0.989s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.30s	1.40s	1.50s	1.65s
0.001	0.003	0.053	0.345	1.175	2.450	3.511	3.792	3.771	3.237	2.335	1.470	0.831	0.211	0.044	0.008	0.001
0.69s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.95s	0.990s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.25s	1.30s	1.40s	1.50s	1.61s
0.001	0.034	0.272	1.069	2.434	3.653	3.996	3.976	3.375	2.359	1.417	0.756	0.368	0.166	0.029	0.004	0.001
0.70s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.95s	0.991s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.25s	1.30s	1.35s	1.40s	1.57s
0.001	0.021	0.213	0.968	2.406	3.780	4.190	4.171	3.500	2.372	1.360	0.685	0.311	0.131	0.051	0.019	0.001
0.71s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.95s	0.992s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.25s	1.30s	1.35s	1.40s	1.54s
0.001	0.013	0.167	0.872	2.368	3.896	4.376	4.358	3.614	2.374	1.300	0.617	0.262	0.102	0.037	0.013	0.001
0.73s	0.75s	0.80s	0.85s	0.90s	0.95s	0.993s	1.00s	1.05s	1.10s	1.15s	1.20s	1.25s	1.30s	1.35s	1.40s	1.49s
0.001	0.005	0.101	0.701	2.271	4.097	4.726	4.709	3.817	2.356	1.175	0.496	0.184	0.062	0.019	0.006	0.001
0.74s	0.80s	0.85s	0.875s	0.90s	0.925s	0.95s	0.994s	1.00s	1.05s	1.075s	1.10s	1.15s	1.20s	1.25s	1.30s	1.45s
0.001	0.060	0.558	1.206	2.156	3.261	4.263	5.051	5.036	3.988	3.143	2.313	1.051	0.395	0.128	0.037	0.001
0.75s	0.80s	0.85s	0.875s	0.90s	0.925s	0.95s	0.994s	1.00s	1.05s	1.075s	1.10s	1.15s	1.20s	1.25s	1.30s	1.42s
0.001	0.036	0.441	1.053	2.030	3.245	4.401	5.357	5.342	4.135	3.173	2.253	0.933	0.312	0.088	0.022	0.001

Table IV (suite)

0.76s	0.80s	0.85s	0.875s	0.90s	0.925s	0.95s	0.995s	1.00s	1.05s	1.075s	1.10s	1.15s	1.20s	1.25s	1.30s	1.39s
0.001	0.021	0.346	0.913	1.899	3.209	4.515	5.647	5.633	4.260	3.182	2.181	0.823	0.245	0.060	0.013	0.001
0.78s	0.80s	0.85s	0.875s	0.90s	0.925s	0.95s	0.996s	1.00s	1.025s	1.05s	1.075s	1.10s	1.15s	1.20s	1.25s	1.35s
0.001	0.007	0.210	0.677	1.640	3.093	4.686	6.185	6.172	5.603	4.458	3.156	2.015	0.631	0.148	0.028	0.001
0.79s	0.825s	0.85s	0.875s	0.90s	0.925s	0.95s	0.996s	1.00s	1.025s	1.05s	1.075s	1.10s	1.15s	1.20s	1.25s	1.32s
0.001	0.022	0.126	0.495	1.396	2.940	4.794	6.680	6.668	5.981	4.599	3.086	1.835	0.477	0.089	0.013	0.001
0.80s	0.825s	0.85s	0.875s	0.90s	0.925s	0.95s	0.975s	0.997s	1.00s	1.025s	1.05s	1.075s	1.10s	1.15s	1.20s	1.29s
0.001	0.010	0.075	0.358	1.176	2.765	4.854	6.588	7.140	7.129	6.319	4.696	2.986	1.655	0.357	0.053	0.001
0.81s	0.825s	0.85s	0.875s	0.90s	0.925s	0.95s	0.975s	0.997s	1.00s	1.025s	1.05s	1.075s	1.10s	1.15s	1.20s	1.28s
0.001	0.005	0.044	0.257	0.982	2.580	4.876	6.897	7.573	7.562	6.623	4.757	2.867	1.480	0.265	0.031	0.001
0.82s	0.85s	0.875s	0.90s	0.925s	0.95s	0.975s	0.998s	1.00s	1.025s	1.05s	1.075s	1.10s	1.125s	1.15s	1.20s	1.26s
0.001	0.026	0.183	0.816	2.393	4.868	7.177	7.892	7.972	6.899	4.788	2.735	1.315	0.543	0.196	0.018	0.001
0.842s	0.875s	0.90s	0.925s	0.95s	0.975s	0.998s	1.00s	1.025s	1.05s	1.075s	1.10s	1.125s	1.15s	1.175s	1.20s	1.21s
0.001	0.032	0.303	1.545	4.542	8.238	9.775	9.767	7.959	4.659	2.035	0.686	0.184	0.040	0.007	0.001	0.001
0.860s	0.88s	0.90s	0.92s	0.94s	0.96s	0.98s	0.999s	1.00s	1.02s	1.04s	1.06s	1.08s	1.10s	1.12s	1.14s	1.18s
0.001	0.010	0.106	0.647	2.431	5.922	9.754	11.286	11.279	9.472	5.955	2.880	1.098	0.338	0.085	0.018	0.001
0.873s	0.88s	0.90s	0.92s	0.94s	0.96s	0.98s	0.999s	1.00s	1.02s	1.04s	1.06s	1.08s	1.10s	1.12s	1.14s	1.159s
0.001	0.002	0.036	0.347	1.823	5.579	10.464	12.618	12.611	10.189	5.731	2.323	0.699	0.161	0.029	0.004	0.001
0.906s	0.92s	0.93s	0.94s	0.95s	0.96s	0.97s	0.98s	0.99s	0.9995s	1.01s	1.02s	1.03s	1.04s	1.06s	1.08s	1.111s
0.001	0.012	0.076	0.351	1.233	3.352	7.134	12.035	16.276	17.843	16.007	11.876	7.352	3.832	0.641	0.059	0.001

315

Table V - Distribution $s\phi_q^{-1}$: inférence relative au paramètre σ , recherche d'une limite supérieure. La probabilité que σ soit inférieur à la valeur donnée par la table est égale à γ .

$P(\sigma < \gamma) = \gamma$

	$\gamma=0.90$	$\gamma=0.95$	$\gamma=0.99$		$\gamma=0.90$	$\gamma=0.95$	$\gamma=0.99$
q=2	3.081s	4.415s	9.975s	q=48	1.156s	1.204s	1.305s
q=3	2.266s	2.920s	5.111s	q=49	1.154s	1.202s	1.301s
q=4	1.939s	2.372s	3.669s	q=50	1.152s	1.199s	1.297s
q=5	1.762s	2.089s	3.003s	q=51	1.150s	1.197s	1.294s
q=6	1.650s	1.915s	2.623s	q=52	1.148s	1.195s	1.290s
q=7	1.572s	1.797s	2.377s	q=53	1.147s	1.192s	1.287s
q=8	1.514s	1.711s	2.204s	q=54	1.145s	1.190s	1.283s
q=9	1.469s	1.645s	2.076s	q=55	1.144s	1.188s	1.280s
q=10	1.434s	1.593s	1.977s	q=56	1.142s	1.186s	1.277s
q=11	1.404s	1.551s	1.898s	q=57	1.141s	1.184s	1.274s
q=12	1.380s	1.515s	1.833s	q=58	1.139s	1.182s	1.271s
q=13	1.359s	1.485s	1.779s	q=59	1.138s	1.180s	1.268s
q=14	1.341s	1.460s	1.733s	q=60	1.136s	1.179s	1.265s
q=15	1.325s	1.437s	1.694s	q=61	1.135s	1.177s	1.262s
q=16	1.311s	1.418s	1.659s	q=62	1.134s	1.175s	1.260s
q=17	1.298s	1.400s	1.629s	q=63	1.133s	1.174s	1.257s
q=18	1.287s	1.385s	1.602s	q=64	1.131s	1.172s	1.255s
q=19	1.277s	1.370s	1.578s	q=65	1.130s	1.170s	1.252s
q=20	1.268s	1.358s	1.556s	q=66	1.129s	1.169s	1.250s
q=21	1.259s	1.346s	1.536s	q=67	1.128s	1.167s	1.248s
q=22	1.252s	1.335s	1.518s	q=68	1.127s	1.166s	1.246s
q=23	1.245s	1.326s	1.502s	q=69	1.126s	1.165s	1.243s
q=24	1.238s	1.316s	1.487s	q=70	1.125s	1.163s	1.241s
q=25	1.232s	1.308s	1.473s	q=71	1.124s	1.162s	1.239s
q=26	1.226s	1.300s	1.460s	q=72	1.123s	1.160s	1.237s
q=27	1.221s	1.293s	1.448s	q=73	1.122s	1.159s	1.235s
q=28	1.216s	1.286s	1.437s	q=74	1.121s	1.158s	1.233s
q=29	1.211s	1.280s	1.426s	q=75	1.120s	1.157s	1.231s
q=30	1.207s	1.274s	1.416s	q=76	1.119s	1.156s	1.229s
q=31	1.203s	1.268s	1.407s	q=77	1.118s	1.154s	1.228s
q=32	1.199s	1.263s	1.398s	q=78	1.117s	1.153s	1.226s
q=33	1.195s	1.258s	1.390s	q=79	1.116s	1.152s	1.224s
q=34	1.191s	1.253s	1.382s	q=80	1.115s	1.151s	1.222s
q=35	1.188s	1.248s	1.375s	q=81	1.114s	1.150s	1.220s
q=36	1.185s	1.244s	1.368s	q=82	1.113s	1.149s	1.218s
q=37	1.182s	1.240s	1.362s	q=83	1.112s	1.148s	1.216s
q=38	1.179s	1.236s	1.355s	q=84	1.111s	1.147s	1.214s
q=39	1.176s	1.232s	1.349s	q=85	1.110s	1.146s	1.212s
q=40	1.173s	1.228s	1.343s	q=86	1.109s	1.145s	1.210s
q=41	1.171s	1.225s	1.338s	q=87	1.108s	1.144s	1.208s
q=42	1.168s	1.222s	1.333s	q=88	1.107s	1.143s	1.206s
q=43	1.166s	1.218s	1.328s	q=89	1.106s	1.142s	1.204s
q=44	1.164s	1.215s	1.323s	q=90	1.105s	1.141s	1.202s
q=45	1.162s	1.212s	1.318s	q=91	1.104s	1.140s	1.200s
q=46	1.159s	1.210s	1.314s	q=92	1.103s	1.139s	1.198s
q=47	1.157s	1.207s	1.309s	q=93	1.102s	1.138s	1.196s
				q=94	1.101s	1.137s	1.194s
				q=95	1.100s	1.136s	1.192s
				q=96	1.099s	1.135s	1.190s
				q=97	1.098s	1.134s	1.188s
				q=98	1.097s	1.133s	1.186s
				q=99	1.096s	1.132s	1.184s
				q=100	1.095s	1.131s	1.182s

Table VI - Distribution $s\phi_q^{-1}$: inférence relative au paramètre σ , recherche d'une limite inférieure. La probabilité que σ soit supérieur à la valeur donnée par la table est égale à γ .

$P(\sigma > \gamma) = \gamma$

	$\gamma=0.90$	$\gamma=0.95$	$\gamma=0.99$		$\gamma=0.90$	$\gamma=0.95$	$\gamma=0.99$
q=2	0.659s	0.578s	0.466s	q=48	0.888s	0.858s	0.807s
q=3	0.693s	0.620s	0.514s	q=49	0.889s	0.859s	0.809s
q=4	0.717s	0.649s	0.549s	q=50	0.890s	0.861s	0.810s
q=5	0.736s	0.672s	0.576s	q=51	0.891s	0.862s	0.812s
q=6	0.751s	0.690s	0.597s	q=52	0.892s	0.863s	0.813s
q=7	0.763s	0.705s	0.616s	q=53	0.892s	0.864s	0.813s
q=8	0.774s	0.718s	0.631s	q=54	0.893s	0.865s	0.816s
q=9	0.783s	0.729s	0.645s	q=55	0.894s	0.866s	0.818s
q=10	0.791s	0.739s	0.656s	q=56	0.895s	0.867s	0.819s
q=11	0.798s	0.748s	0.667s	q=57	0.896s	0.868s	0.820s
q=12	0.804s	0.755s	0.677s	q=58	0.897s	0.869s	0.821s
q=13	0.810s	0.762s	0.685s	q=59	0.897s	0.870s	0.823s
q=14	0.815s	0.769s	0.693s	q=60	0.898s	0.871s	0.824s
q=15	0.820s	0.775s	0.700s	q=61	0.899s	0.872s	0.825s
q=16	0.824s	0.780s	0.707s	q=62	0.899s	0.873s	0.826s
q=17	0.828s	0.785s	0.713s	q=63	0.900s	0.874s	0.827s
q=18	0.832s	0.790s	0.719s	q=64	0.901s	0.875s	0.829s
q=19	0.836s	0.794s	0.725s	q=65	0.902s	0.875s	0.830s
q=20	0.839s	0.798s	0.730s	q=66	0.902s	0.876s	0.831s
q=21	0.842s	0.802s	0.734s	q=67	0.903s	0.877s	0.832s
q=22	0.845s	0.805s	0.739s	q=68	0.903s	0.878s	0.833s
q=23	0.848s	0.809s	0.743s	q=69	0.904s	0.879s	0.834s
q=24	0.850s	0.812s	0.747s	q=70	0.905s	0.879s	0.835s
q=25	0.853s	0.815s	0.751s	q=71	0.905s	0.880s	0.836s
q=26	0.855s	0.818s	0.755s	q=72	0.906s	0.881s	0.837s
q=27	0.857s	0.820s	0.758s	q=73	0.906s	0.882s	0.838s
q=28	0.859s	0.823s	0.762s	q=74	0.907s	0.882s	0.839s
q=29	0.861s	0.825s	0.765s	q=75	0.908s	0.883s	0.840s
q=30	0.863s	0.828s	0.768s	q=76	0.908s	0.884s	0.840s
q=31	0.865s	0.830s	0.771s	q=77	0.909s	0.884s	0.841s
q=32	0.867s	0.832s	0.773s	q=78	0.909s	0.885s	0.842s
q=33	0.869s	0.834s	0.776s	q=79	0.910s	0.886s	0.843s
q=34	0.870s	0.836s	0.779s	q=80	0.910s	0.886s	0.844s
q=35	0.872s	0.838s	0.781s	q=81	0.911s	0.889s	0.848s
q=36	0.873s	0.840s	0.784s	q=82	0.911s	0.892s	0.852s
q=37	0.875s	0.842s	0.786s	q=83	0.911s	0.894s	0.855s
q=38	0.876s	0.844s	0.788s	q=84	0.912s	0.897s	0.858s
q=39	0.877s	0.845s	0.790s	q=85	0.912s	0.897s	0.858s
q=40	0.879s	0.847s	0.792s	q=86	0.913s	0.898s	0.859s
q=41	0.880s	0.848s	0.795s	q=87	0.913s	0.898s	0.859s
q=42	0.881s	0.850s	0.796s	q=88	0.914s	0.899s	0.860s
q=43	0.882s	0.852s	0.798s	q=89	0.914s	0.900s	0.861s
q=44	0.884s	0.853s	0.800s	q=90	0.915s	0.901s	0.862s
q=45	0.885s	0.854s	0.802s	q=91	0.915s	0.901s	0.862s
q=46	0.886s	0.856s	0.804s	q=92	0.916s	0.902s	0.863s
q=47	0.887s	0.857s	0.805s	q=93	0.916s	0.902s	0.863s
				q=94	0.917s	0.903s	0.864s
				q=95	0.917s	0.903s	0.864s
				q=96	0.918s	0.904s	0.865s
				q=97	0.918s	0.904s	0.865s
				q=98	0.919s	0.905s	0.866s
				q=99	0.919s	0.905s	0.866s
				q=100	0.920s	0.906s	0.867s

BIBLIOGRAPHIE SELECTIONNEE SUR L'ANALYSE DES COMPARAISONS

Les références citées dans l'ouvrage sont précédées d'un astérisque
Celles citées dans l'avant-propos sont précédées d'une dague

- BEAUVILLAIN C., DUQUENNE V. - Programmation, planification et analyse des résultats d'une expérience sur l'accès lexical en situation inter-langues. *Informatique et Sciences Humaines*, 1982, 55, 9-43.
- BERGES J.-C. - *Quelques propriétés fondamentales des procédures pondérées et équipondérées*. Mémoire de D.E.A. de mathématiques, Paris: Université René Descartes, 1978.
- BERNARD J.-M. - *Inférence bayésienne sur des fréquences dans le cas de données structurées: méthodes exactes et approchées*. Thèse de doctorat du troisième cycle de psychologie, Paris: Université René Descartes, 1983.
- BERNARD J.-M., BLANCHETTEAU M., ROUANET H. - Le comportement prédateur chez un forficule, *Eurobellia moesta* (Géné): II. Analyse séquentielle au moyen de méthodes d'inférence bayésienne. 1983, *soumis pour publication*.
- DENHIERE G., LECOUTURE B. - Mémorisation de récits: reconnaissance immédiate et différée d'énoncés par des enfants de 7, 8 et 10 ans. *L'Année Psychologique*, 1983, 83, 345-376.
- + DUQUENNE V. - Un programme de description de données. *Cahiers de Psychologie*, 1976, 19, 109-118.
- DUQUENNE V. - Représentation optimale d'un plan quasi-complet. *In Colloque IRIA "Analyse des données et Informatique"*, Versailles: IRIA, 1977, 297-302.
- + DUQUENNE V. - *Quelques aspects algébriques du traitement de données planifiées*. Thèse de doctorat du troisième cycle de psychologie, Paris: Université René Descartes, 1980.
- DUQUENNE V., MONTARDET B. - Relations binaires entre partitions. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1982, 80, 5-37.
- EHRLLICH M.-F. - Problèmes pédagogiques; l'enseignement des notions élémentaires de méthodologie expérimentale: la planification des expériences. *Mathématiques et Psychologie*, 1975, 50, 39-50.
- * GUIGUES J.-L. - Note sur le calcul de la distribution du psi-deux. *Document interne du Groupe Mathématiques et Psychologie*, Paris: Université René Descartes, 1981.
- HOC J.-M. - Note sur l'analyse de la variance et l'inférence fiduciaire. *Le Travail Humain*, 1975, 38, 279-286.
- HOC J.-M. - L'inférence fiduciaire comme méthode d'analyse de données: implications méthodologiques et élaborations de programmes. *In Colloque IRIA "Analyse des données et Informatique"*, Versailles: IRIA, 1977, 291-295.

- + HOC J.-M. - *L'analyse planifiée des données en psychologie*. Paris: Presses Universitaires de France, collection *Le psychologue*, 1983.
- + LECOUTRE B. - Note sur le calcul de la distribution fiduciaire pour une inférence sur un contraste entre moyennes. *Cahiers de Psychologie*, 1978, 21, 279-282.
- + LECOUTRE B. - *Extensions bayésiennes de l'analyse de la variance*. Thèse de doctorat du troisième cycle de mathématiques, Paris: Université René Descartes, 1980.
- * LECOUTRE B. - Extensions de l'analyse de la variance: l'analyse bayésienne des comparaisons. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1981, 75, 49-69.
- LECOUTRE B. - Procédures fiducio-bayésiennes pour l'investigation des mécanismes individuels en psychologie. *L'Année Psychologique*, 1981, 81, 453-464.
- * LECOUTRE B. - Modèles d'échantillonnage pour le plan $A \times G \times T$ dans le cas multivarié. *Rapport technique*, octobre 1981 (1981b).
- LECOUTRE B. - Extensions bayésiennes de l'analyse de la variance (présentation de thèse). *Bulletin de Psychologie*, 1981-1982, XXXV, 390-395.
- * LECOUTRE B. - Quelques distributions utiles dans les extensions bayésiennes de l'analyse de la variance. *Document interne du Groupe Mathématiques et Psychologie*, Paris: Université René Descartes, 1982.
- LECOUTRE B. - Extensions de l'analyse de la covariance dans la ligne de l'Analyse Bayésienne des Comparaisons: I - Etude du plan $A \times G$ dans le cas univarié pour une covariable numérique, résultats théoriques et exemple numérique. *Document interne du Groupe Mathématiques et Psychologie*, Paris: Université René Descartes, 1982.
- LECOUTRE B. - Extension de la métrique euclidienne dans l'Analyse des Comparaisons. *Document interne du Groupe Mathématiques et Psychologie*. Paris: Université René Descartes, 1982.
- LECOUTRE B. - Inférence prédictive en analyse de la variance. *Communication à la Journée Bayésienne*, Paris: Université René Descartes, décembre 1982.
- LECOUTRE B. - Introduction à l'Analyse Bayésienne des Comparaisons (extension bayésienne de l'analyse de la variance). *Cahiers d'Anthropologie et Biométrie Humaine*, 1983.
- + LECOUTRE B. - Réinterprétation fiducio-bayésienne du test F de l'analyse de la variance. *L'Année Psychologique*, 1984.
- +* LECOUTRE B., LECOUTRE M.-P. - A propos d'une expérience d'apprentissage perceptif incident: quelques aspects de la démarche d'analyse des données et méthodes fiduciaires. *Psychologie Française*, 1979, 24, 269-276.
- * LECOUTRE B., ROUANET H. - Deux structures statistiques fondamentales en analyse de la variance univariée et multivariée. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1981, 75, 71-82.

- +* LEPINE D. - Facteurs et plans: I - Structure de finesse. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1977, 57, 5-26 (1977a).
- +* LEPINE D. - Facteurs et plans: II - Plans quasi-complets. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1977, 58, 5-24 (1977b).
- + LEPINE D., ROUANET H. - Introduction aux méthodes fiduciaires: inférence sur un contraste entre moyennes. *Cahiers de Psychologie*, 1975, 18, 193-218.
- +* LEPINE D., ROUANET H., LEBEAUX M.-O. - *L'analyse des comparaisons systématiques dans un plan à un facteur aléatoire (structure $S \times G \times T$): introduction au programme VAR 3*. Brochure ronéotée (le document ne comporte pas d'indication de date), 1976.
- LE ROUX B., ROUANET H. - L'analyse statistique des protocoles multidimensionnels: Analyse en composantes principales. *Publications de l'Institut de Statistique de Paris*, 1979, XXIV, 47-74.
- * LE ROUX B., ROUANET H. - L'analyse statistique des protocoles multidimensionnels: Analyse des comparaisons (nuage pondéré sur le croisement de deux facteurs). *Publications de l'Institut de Statistique de Paris*, 1983, XXVIII, 47-70.
- + LE ROUX B., ROUANET H. - Analyse multidimensionnelle des données structurées. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1984.
- PELINARD-CONSIDERE J., LEVASSEUR J., CHAMBRAS G. - Comparaison de groupes par la méthode bayeso-fiduciaire: une application à la psycho-pédagogie. *Le Travail Humain*, 1979, 42, 41-56.
- REUCHLIN M. - Epreuves d'hypothèse nulle et inférence fiduciaire en psychologie. *Journal de Psychologie*, 1977, 3, 277-292.
- + ROUANET H. - Compte rendu de fin d'études sur la recherche D.G.R.S.T. "Méthodes fiduciaires d'analyse des données expérimentales", 1977.
- + ROUANET H. - L'analyse statistique des données expérimentales: introduction à une approche algébrique. *Informatique et Sciences Humaines*, 1979, 40-41, 203-221.
- ROUANET H. - Notice remise à jour d'utilisation du programme VAR 3 de Lebeaux, Lépine, Rouanet. Paris: Université René Descartes, 1980.
- ROUANET H. - *CI de psychologie générale: Documents pour l'enseignement de statistique - Procédures statistiques fondamentales et initiation à l'usage de l'ordinateur*. Paris: Université René Descartes, 1983-1984.
- +* ROUANET H., LECOUTRE B. - Specific inference in ANOVA: from significance tests to Bayesian procedures. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 1983, 36, 252-268.
- ROUANET H., LECOUTRE B., BERNARD J.-M. - Bayesian inference as a method of data analysis. *Communication au Third European Meeting of the Psychometric Society*, Jouv-en-Josas, juillet 1983.

- +* ROUANET H., LEPINE D. - Comparisons between treatments in a repeated-measurement design: ANOVA and multivariate methods. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 1970, 23, 147-163.
- * ROUANET H., LEPINE D. - Statistiques de groupe, groupes d'observation. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1973, 41, 31-36.
- ROUANET H., LEPINE D. - Problèmes de méthodologie statistique; I - Introduction à l'étude de la robustesse des méthodes usuelles d'inférence statistique. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1974, 46, 21-33.
- ROUANET H., LEPINE D. - Problèmes de méthodologie statistique; II - Etude d'un conflit robuste-efficacité dans le problème de la comparaison de deux moyennes (groupes indépendants). *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1974, 47, 61-71.
- +* ROUANET H., LEPINE D. - Structures linéaires et analyse des comparaisons. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1976, 56, 5-46.
- + ROUANET H., LEPINE D. - À propos de l'"Analyse des données" selon Benzécri (suivi d'une "Lettre de commentaires" de J.-P. Benzécri). *L'Année Psychologique*, 1976, 76, 133-144 (1976b).
- +* ROUANET H., LEPINE D. - Introduction à l'analyse des comparaisons pour le traitement des données expérimentales. *Informatique et Sciences Humaines*, 1977, 33-34, 1-125.
- ROUANET H., LEPINE D., EHRLICH M.-F., MARQUER P., PLAS R. - Introduction aux procédures élémentaires d'analyse descriptive des données: présentation à partir d'un exemple. *Bulletin de Psychologie*, 1975-1976, XXIX, 212-221.
- + ROUANET H., LEPINE D., HOLENDER D. - Model acceptability and the use of Bayes-fiducial procedures for validating models. *In J. Requin (Ed.), Attention and Performance VII*, Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1978, 687-701.
- + ROUANET H., LEPINE D., PELNARD-CONSIDERE J. - Bayes-fiducial procedures as practical substitutes for misplaced significance testing: an application to educational data. *In D.N.M. De Grujter and L.J.Th. Van der Kamp (Eds), Advances in Psychological and Educational Measurement*, New York: Wiley, 1975, 33-50.
- + ROUANET H., ROGALSKI J., LEPINE D. - Algèbre linéaire et formalisation de la notion de comparaison. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1968, 24, 5-16.
- * WAISBROT M. - *Distributions de formes quadratiques de variables multivariées: application au plan S<G>*T*. Mémoire de D.E.A. de mathématiques, Paris: Université René Descartes, 1977.

*
*

AUTRES REFERENCES CITEES DANS LE TEXTE

- Les références citées dans l'ouvrage sont précédées d'un astérisque. Celles citées dans l'avant-propos sont précédées d'une daque
- + ANDERSON T.W. - *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. New York: Wiley, 1958.
- + BAYES T. - An essay toward solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1763, 53, 370-418.
- +* BOX G.E.P., TIAO G.C. - *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Cambridge, MA: Addison-Wesley, 1973.
- * COCHRAN W.G., COX G.M. - *Experimental Designs*. New York: Wiley, 1957, deuxième édition (première édition en 1950).
- * CRAMER H. - *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton: Princeton University Press, 1946.
- + DE FINETTI B. - *Theory of Probability* (deux volumes). New York: Wiley, 1974.
- * FISHER R.A. - *The Design of Experiments*. Edinburgh and London: Oliver and Boyd, 1935.
- * FISHER R.A. - *Statistical Methods for Research Workers*. Edinburgh and London: Oliver and Boyd, 1944, neuvième édition (première édition en 1925).
- +* FISHER R.A. - *Statistical Methods and Scientific Inference*. Edinburgh and London: Oliver and Boyd, 1956.
- * FISHER R.A., YATES F. - *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*. London: Longman, 1963, sixième édition.
- + GUTTMAN W. - Cyril Burt and the careless star worshippers. *L'Echo des Messages*, 1979, 9, 7-8.
- +* JEFFREYS H. - *Theory of Probability*. Oxford: Oxford University Press, 1961, troisième édition (première édition en 1939).
- * LINDLEY D.V. - *Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint, Part 2 - Inference*. Cambridge: Cambridge University Press, 1965.
- * MENDOZA J.L., TOOTHAKER L.E., CRAIN B.R. - Necessary and sufficient conditions for F ratios in the IxJxK factorial design with two repeated factors. *Journal of the American Statistical Association*, 1976, 71, 992-993.
- * RAO C.R. - *Linear Statistical Inference and its Applications*. New York: Wiley, 1965.

- Bayes (formule de), 105
 Bayésiennes, voir procédures.
- Carré-moyen, 60
- Circularité (condition de), 150
- Comparaison:
 définition générale, 58
 conditionnelle, 64
 des types $V/T1$, $W/G1$, $W.W$, 66
 des types $A(\hat{\theta})/T1$, $A(\hat{\theta}).W$, 67
 d'interaction, 65
 entre parties, 67
 globale, 58
 inter et intra pour un croisement, 63
 inter et intra pour un emboîtement, 62
 résiduelle, 60
- Complet, voir facteur et plan.
- Conditionnement, voir comparaison conditionnelle.
- Contraste:
 définition générale, 58
 d'interaction, 65
 des types $V_G/T1$, $W_T/G1$, $V_G.W_T$, 66
 inter et intra pour un croisement, 63
 inter et intra pour un emboîtement, 62
- Croisement:
 définition générale, 50
 décompositions d'un croisement, 64-65
 orthogonalité (condition d'), 64
- Degrés de liberté (nombre de):
 d'un sous-espace de l'espace des mesures, 57
 d'une comparaison, 58
- Densité d'une mesure sur J par rapport à la mesure fondamentale, 55
- Densités utiles:
 calcul pratique, 98
 formules, 94
 obtention, 96
- Distribution:
 définition générale, 79
 langage des distributions, 80
- Distribution $F_{m,q}$ (F centré), 86
- Distribution $F'_{m,q}$, 86
- Distribution $F'_{m,q}(a^2)$ (F non-centré), 85-89
- Distribution $K_{m,q}$, 92
- Distribution $K'_{m,q}$, 92
- Distribution $K'_{m,q}(a, e^2)$, 91

- Distribution $K'_{m;q} (a, e^2 I_m)$, 92
- Distribution $L_{m,q} (a^2)$, 91
- Distribution $L^2_{m,q} (a^2)$, 90
- Distribution $L'_{m,q} (a, e^2)$, 87
- Distribution $L''_{m,q} (a, e^2 I_m)$, 88
- Distribution $N(a, e^2)$ (normale unidimensionnelle), 83
- Distribution $N_p(a, E)$ (normale multidimensionnelle), 83
- Distribution t_q (t centré), 85
- Distribution $t_q(a, e^2)$ (t généralisé), 87
- Distribution $t_{m;q} (a, E)$ (t généralisé multidimensionnelle), 88
- Distribution $t'_q(a)$ (t non-centré), 85-87
- Distribution $W_{p;q} (E)$ (Wishart), 85
- Distribution ϕ^{-1}_q (phi-inverse), 84
- Distribution $\chi_{m,q} (a^2)$ (khi), 84
- Distribution χ^2_q (khi-deux centré), 84
- Distribution $\chi^2_m (a^2)$ (khi-deux non-centré), 84
- Distribution $\psi_{m,q} (a^2)$ (psi), 90
- Distribution $\psi^2_{m,q} (a^2)$ (psi-deux), 89
- Distribution d'échantillonnage, 104
- Distribution fiducio-bayésienne, 122
- Distribution finale, 105
- Distribution initiale, 105
- Distribution prédictive, 105
- Distribution prédictive fiducio-bayésienne, 125
- Distributivité de l'interaction, 66
- Ecart relatif de l'effet théorique par rapport à l'effet observé, 108
- Ecart-Lype-corrigé, 74
- Echantillonnage, voir distribution, modèle.
- Effet observé (voir grandeur, représentant):
 - d'un facteur, 70
 - d'un contraste, d'une comparaison, 75
 - absence d'effet d'un facteur, 70
- Effet théorique (voir grandeur, représentant, négligeable, notable):
 - d'un contraste, d'une comparaison, 106
 - absence d'effet, 107
- Emboîtement:
 - définition générale, 49
 - décomposition d'un emboîtement, 63
 - emboîtement équilibré, 49
- Équilibré, voir emboîtement.

- Espace et espace mesurable, 79
- Espace des mesures, espace des protocoles de support J, 54
- Facteur:
 - d'un protocole (définition générale), 48
 - complet, 50
 - composé, 48
 - constant, 48
 - de groupe, 51
 - élémentaire, 51
 - partiel, 48
 - quasi-complet, 50
 - systématique, 51
- Famille des observations, 45
- Fiducio-bayésienne, voir distribution, procédures.
- Grandeur de l'effet observé:
 - d'un contraste sur un support systématique, 75
 - d'un facteur de groupe, 74
 - d'un facteur systématique à deux modalités, 71
 - d'un facteur systématique à plusieurs modalités, 72
 - d'une comparaison sur un support systématique, 75
 - d'une comparaison sur un support non systématique, 76
- Grandeur de l'effet théorique:
 - d'un contraste sur un support systématique, 106
 - d'une comparaison sur un support systématique, 107
 - d'une comparaison sur un support non systématique, 109
- Groupes appariés et séparés, 52
- Indicateur de la grandeur de l'effet, voir grandeur de l'effet.
- Inertie (voir somme-des-carrés), 58
- Inférence générale, 110
- Inférence spécifique, 112
- Interaction (voir distributivité), 65
- Mesure fondamentale, 55
- Mesure-normalisée, 79
- Mesures et formes linéaires (identification), 54
- Modalité d'un facteur, 48
- Modèle:
 - normal, 113-137
 - multinormal, 137
 - normal des groupes séparés, 142
 - multinormal des groupes séparés, 139
- Modèles:
 - M_G/T_1 , 146
 - M_G/M , 150

Modèle d'échantillonnage:

sur un espace de protocoles (définition générale), 103
général, 110
spécifique, 112
spécifique primitif et dérivé, 114

Moyenne d'un protocole, 57

Moyenne pondérée et équipondérée, 54

Négligeable (effet), 107

Norme d'un protocole, d'une mesure, 56

Notable (effet), 107

Notations générales:

pour les vecteurs, les familles, les matrices, 80
pour les variables et les distributions, 81

Observation, 45

Orthogonalité des protocoles et des mesures, 57

Plan:

d'un protocole (définition générale), 51

complet, 52

quasi-complet, 52

Plan d'analyse, 51

Plans $A \times G \times T$, 52

Prédictive, voir distribution, procédures.

Problème statistique bayésien, 105

Procédures bayésiennes, 134

Procédures fiducio-bayésiennes, 132-133

Procédures prédictives, 125-133

Produit scalaire sur l'espace des protocoles, 55

Protocole:

définition générale, 45

à analyser, 45

centré, 57

constant, 57

dérivé par moyennage, 53

multinométrique, 53

numérique, 45

pertinent, 112

pondéré, 53

Quasi-complet, voir facteur et plan.

Remontée des contrastes, 60

Représentant de l'effet observé:

d'un facteur systématique à plusieurs modalités, 71-73
d'une comparaison sur un facteur systématique, 75

Représentant de l'effet théorique d'une comparaison, 107

Résiduelle, voir comparaison.

Seuil de signification observé:

du test F , 125unilatéral du test t , 125

Somme-des-carrés:

définition générale, 58

additivité des sommes-des-carrés, 60

formules de calcul générales, 59

formules de calcul dans les plans $A \times G \times T$, 68

Sous-comparaison, 58

Sous-protocole, 53

Spécifique, voir inférence, modèle d'échantillonnage et structure statistique.

Statistique sur un espace de protocoles:

définition générale, 103

numérique et multinométrique, 103

Structure statistique (définition générale), 104

Structure statistique bayésienne, 105

Structure statistique spécifique:

"normale - χ^2 ", 113-117"multinormale - χ^2 ", 117-119Test de signification de l'hypothèse nulle $\lambda = 0$, 120

Transition, 79

Variable:

définition générale, 79

numérique et multinométrique, 79

langage des variables, 80

Variance d'un protocole, 57

*

*

*

1984
1983
1982
1981
1980
1979
1978
1977
1976
1975
1974
1973
1972
1971
1970
1969
1968
1967
1966
1965
1964
1963
1962
1961
1960
1959
1958
1957
1956
1955
1954
1953
1952
1951
1950
1949
1948
1947
1946
1945
1944
1943
1942
1941
1940
1939
1938
1937
1936
1935
1934
1933
1932
1931
1930
1929
1928
1927
1926
1925
1924
1923
1922
1921
1920
1919
1918
1917
1916
1915
1914
1913
1912
1911
1910
1909
1908
1907
1906
1905
1904
1903
1902
1901
1900
1899
1898
1897
1896
1895
1894
1893
1892
1891
1890
1889
1888
1887
1886
1885
1884
1883
1882
1881
1880
1879
1878
1877
1876
1875
1874
1873
1872
1871
1870
1869
1868
1867
1866
1865
1864
1863
1862
1861
1860
1859
1858
1857
1856
1855
1854
1853
1852
1851
1850
1849
1848
1847
1846
1845
1844
1843
1842
1841
1840
1839
1838
1837
1836
1835
1834
1833
1832
1831
1830
1829
1828
1827
1826
1825
1824
1823
1822
1821
1820
1819
1818
1817
1816
1815
1814
1813
1812
1811
1810
1809
1808
1807
1806
1805
1804
1803
1802
1801
1800
1799
1798
1797
1796
1795
1794
1793
1792
1791
1790
1789
1788
1787
1786
1785
1784
1783
1782
1781
1780
1779
1778
1777
1776
1775
1774
1773
1772
1771
1770
1769
1768
1767
1766
1765
1764
1763
1762
1761
1760
1759
1758
1757
1756
1755
1754
1753
1752
1751
1750
1749
1748
1747
1746
1745
1744
1743
1742
1741
1740
1739
1738
1737
1736
1735
1734
1733
1732
1731
1730
1729
1728
1727
1726
1725
1724
1723
1722
1721
1720
1719
1718
1717
1716
1715
1714
1713
1712
1711
1710
1709
1708
1707
1706
1705
1704
1703
1702
1701
1700
1699
1698
1697
1696
1695
1694
1693
1692
1691
1690
1689
1688
1687
1686
1685
1684
1683
1682
1681
1680
1679
1678
1677
1676
1675
1674
1673
1672
1671
1670
1669
1668
1667
1666
1665
1664
1663
1662
1661
1660
1659
1658
1657
1656
1655
1654
1653
1652
1651
1650
1649
1648
1647
1646
1645
1644
1643
1642
1641
1640
1639
1638
1637
1636
1635
1634
1633
1632
1631
1630
1629
1628
1627
1626
1625
1624
1623
1622
1621
1620
1619
1618
1617
1616
1615
1614
1613
1612
1611
1610
1609
1608
1607
1606
1605
1604
1603
1602
1601
1600
1599
1598
1597
1596
1595
1594
1593
1592
1591
1590
1589
1588
1587
1586
1585
1584
1583
1582
1581
1580
1579
1578
1577
1576
1575
1574
1573
1572
1571
1570
1569
1568
1567
1566
1565
1564
1563
1562
1561
1560
1559
1558
1557
1556
1555
1554
1553
1552
1551
1550
1549
1548
1547
1546
1545
1544
1543
1542
1541
1540
1539
1538
1537
1536
1535
1534
1533
1532
1531
1530
1529
1528
1527
1526
1525
1524
1523
1522
1521
1520
1519
1518
1517
1516
1515
1514
1513
1512
1511
1510
1509
1508
1507
1506
1505
1504
1503
1502
1501
1500
1499
1498
1497
1496
1495
1494
1493
1492
1491
1490
1489
1488
1487
1486
1485
1484
1483
1482
1481
1480
1479
1478
1477
1476
1475
1474
1473
1472
1471
1470
1469
1468
1467
1466
1465
1464
1463
1462
1461
1460
1459
1458
1457
1456
1455
1454
1453
1452
1451
1450
1449
1448
1447
1446
1445
1444
1443
1442
1441
1440
1439
1438
1437
1436
1435
1434
1433
1432
1431
1430
1429
1428
1427
1426
1425
1424
1423
1422
1421
1420
1419
1418
1417
1416
1415
1414
1413
1412
1411
1410
1409
1408
1407
1406
1405
1404
1403
1402
1401
1400
1399
1398
1397
1396
1395
1394
1393
1392
1391
1390
1389
1388
1387
1386
1385
1384
1383
1382
1381
1380
1379
1378
1377
1376
1375
1374
1373
1372
1371
1370
1369
1368
1367
1366
1365
1364
1363
1362
1361
1360
1359
1358
1357
1356
1355
1354
1353
1352
1351
1350
1349
1348
1347
1346
1345
1344
1343
1342
1341
1340
1339
1338
1337
1336
1335
1334
1333
1332
1331
1330
1329
1328
1327
1326
1325
1324
1323
1322
1321
1320
1319
1318
1317
1316
1315
1314
1313
1312
1311
1310
1309
1308
1307
1306
1305
1304
1303
1302
1301
1300
1299
1298
1297
1296
1295
1294
1293
1292
1291
1290
1289
1288
1287
1286
1285
1284
1283
1282
1281
1280
1279
1278
1277
1276
1275
1274
1273
1272
1271
1270
1269
1268
1267
1266
1265
1264
1263
1262
1261
1260
1259
1258
1257
1256
1255
1254
1253
1252
1251
1250
1249
1248
1247
1246
1245
1244
1243
1242
1241
1240
1239
1238
1237
1236
1235
1234
1233
1232
1231
1230
1229
1228
1227
1226
1225
1224
1223
1222
1221
1220
1219
1218
1217
1216
1215
1214
1213
1212
1211
1210
1209
1208
1207
1206
1205
1204
1203
1202
1201
1200
1199
1198
1197
1196
1195
1194
1193
1192
1191
1190
1189
1188
1187
1186
1185
1184
1183
1182
1181
1180
1179
1178
1177
1176
1175
1174
1173
1172
1171
1170
1169
1168
1167
1166
1165
1164
1163
1162
1161
1160
1159
1158
1157
1156
1155
1154
1153
1152
1151
1150
1149
1148
1147
1146
1145
1144
1143
1142
1141
1140
1139
1138
1137
1136
1135
1134
1133
1132
1131
1130
1129
1128
1127
1126
1125
1124
1123
1122
1121
1120
1119
1118
1117
1116
1115
1114
1113
1112
1111
1110
1109
1108
1107
1106
1105
1104
1103
1102
1101
1100
1099
1098
1097
1096
1095
1094
1093
1092
1091
1090
1089
1088
1087
1086
1085
1084
1083
1082
1081
1080
1079
1078
1077
1076
1075
1074
1073
1072
1071
1070
1069
1068
1067
1066
1065
1064
1063
1062
1061
1060
1059
1058
1057
1056
1055
1054
1053
1052
1051
1050
1049
1048
1047
1046
1045
1044
1043
1042
1041
1040
1039
1038
1037
1036
1035
1034
1033
1032
1031
1030
1029
1028
1027
1026
1025
1024
1023
1022
1021
1020
1019
1018
1017
1016
1015
1014
1013
1012
1011
1010
1009
1008
1007
1006
1005
1004
1003
1002
1001
1000
999
998
997
996
995
994
993
992
991
990
989
988
987
986
985
984
983
982
981
980
979
978
977
976
975
974
973
972
971
970
969
968
967
966
965
964
963
962
961
960
959
958
957
956
955
954
953
952
951
950
949
948
947
946
945
944
943
942
941
940
939
938
937
936
935
934
933
932
931
930
929
928
927
926
925
924
923
922
921
920
919
918
917
916
915
914
913
912
911
910
909
908
907
906
905
904
903
902
901
900
899
898
897
896
895
894
893
892
891
890
889
888
887
886
885
884
883
882
881
880
879
878
877
876
875
874
873
872
871
870
869
868
867
866
865
864
863
862
861
860
859
858
857
856
855
854
853
852
851
850
849
848
847
846
845
844
843
842
841
840
839
838
837
836
835
834
833
832
831
830
829
828
827
826
825
824
823
822
821
820
819
818
817
816
815
814
813
812
811
810
809
808
807
806
805
804
803
802
801
800
799
798
797
796
795
794
793
792
791
790
789
788
787
786
785
784
783
782
781
780
779
778
777
776
775
774
773
772
771
770
769
768
767
766
765
764
763
762
761
760
759
758
757
756
755
754
753
752
751
750
749
748
747
746
745
744
743
742
741
740
739
738
737
736
735
734
733
732
731
730
729
728
727
726
725
724
723
722
721
720
719
718
717
716
715
714
713
712
711
710
709
708
707
706
705
704
703
702
701
700
699
698
697
696
695
694
693
692
691
690
689
688
687
686
685
684
683
682
681
680
679
678
677
676
675
674
673
672
671
670
669
668
667
666
665
664
663
662
661
660
659
658
657
656
655
654
653
652
651
650
649
648
647
646
645
644
643
642
641
640
639
638
637
636
635
634
633
632
631
630
629
628
627
626
625
624
623
622
621
620
619
618
617
616
615
614
613
612
611
610
609
608
607
606
605
604
603
602
601
600
599
598
597
596
595
594
593
592
591
590
589
588
587
586
585
584
583
582
581
580
579
578
577
576
575
574
573
572
571
570
569
568
567
566
565
564
563
562
561
560
559
558
557
556
555
554
553
552
551
550
549
548
547
546
545
544
543
542
541
540
539
538
537
536
535
534
533
532
531
530
529
528
527
526
525
524
523
522
521
520
519
518
517
516
515
514
513
512
511
510
509
508
507
506
505
504
503
502
501
500
499
498
497
496
495
494
493
492
491
490
489
488
487
486
485
484
483
482
481
480
479
478
477
476
475
474
473
472
471
470
469
468
467
466
465
464
463
462
461
460
459
458
457
456
455
454
453
452
451
450
449
448
447
446
445
444
443
442
441
440
439
438
437
436
435
434
433
432
431
430
429
428
427
426
425
424
423
422
421
420
419
418
417
416
415
414
413
412
411
410
409
408
407
406
405
404
403
402
401
400
399
398
397
396
395
394
393
392
391
390
389
388
387
386
385
384
383
382
381
380
379
378
377
376
375
374
373
372
371
370
369
368
367
366
365
364
363
362
361
360
359
358
357
356
355
354
353
352
351
350
349
348
347
346
345
344
343
342
341
340
339
338
337
336
335
334
333
332
331
330
329
328
327
326
325
324
323
322
321
320
319
318
317
316
315
314
313
312
311
310
309
308
307
306
305
304
303
302
301
300
299
298
297
296
295
294
293
292
291
290
289
288
287
286
285
284
283
282
281
280
279
278
277
276
275
274
273
272
271
270
269
268
267
266
265
264
263
262
261
260
259
258
257
256
255
254
253
252
251
250
249
248
247
246
245
244
243
242
241
240
239
238
237
236
235
234
233
232
231
230
229
228
227
226
225
224
223
222
221
220
219
218
217
216
215
214
213
212
211
210
209
208
207
206
205
204
203
202
201
200
199
198
197
196
195
194
193
192
191
190
189
188
187
186
185
184
183
182
181
180
179
178
177
176
175
174
173
172
171
170
169
168
167
166
165
164
163
162
161
160
159
158
157
156
155
154
153
152
151
150
149
148
147
146
145
144
143
142
141
140
139
138
137
136
135
134
133
132
131
130
129
128
127
126
125
124
123
122
121
120
119
118
117
116
115
114
113
112
111
110
109
108
107
106
105
104
103
102
101
100
99
98
97
96
95
94
93
92
91
90
89
88
87
86
85
84
83
82
81
80
79
78
77
76
75
74
73
72
71
70
69
68
67
66
65
64
63
62
61
60
59
58
57
56
55
54
53
52
51
50
49
48
47
46
45
44
43
42
41
40
39
38
37
36
35
34
33
32
31
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0

ACHEVÉ D'IMPRIMER
AUX PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE III
OUVRAGE FAÇONNÉ
PAR L'IMPRIMERIE CENTRALE DE L'ARTOIS
RUE STE MARGUERITE A ARRAS
Dépôt légal : 1^{er} trimestre 1984

Cet ouvrage se situe dans un courant de recherche, né en France dans les années 1970 à partir des travaux de H. Rouanet et D. Lépine, qui consiste à refondre, à partir d'une formalisation algébrique, les méthodes traditionnelles d'analyse statistique des données expérimentales.

• Les données des chercheurs sont en règle générale des données *structurées* ; la *formalisation* des structures, étroitement liée au plan de recueil des données (plan d'expérience ou plan d'enquête) fournit un cadre aux questions que le chercheur se pose à propos de ses données.

• Le problème de la *généralisabilité* des conclusions est incontournable ; l'idée d'*inférence spécifique* permet, à l'intérieur de chaque situation d'appliquer les procédures inférentielles adaptées pour les structures qui interviennent dans cette situation.

• Il s'agit de fournir des procédures répondant aux objectifs réels de l'induction ; les *procédures bayésiennes*, envisagées comme un prolongement des *tests de signification* usuels permettent notamment de se prononcer sur l'importance de chaque effet examiné, et non seulement sur son existence ; en particulier les *procédures fiducio-bayésiennes* expriment, pour chaque question posée par le chercheur, « ce que les données ont à dire », indépendamment de toute information extérieure.

Il en résulte une construction nouvelle, de plus en plus autonome par rapport aux développements traditionnels de l'analyse de la variance à l'anglo-saxonne : l'*Analyse Bayésienne des Comparaisons*, parce que la notion formalisée de comparaison y joue un rôle central. diversifiés.

Collection dirigée par Pierre Lecocq

De l'enseignement programmé à la programmation de la connaissance. Perspectives soviétiques. *Textes réunis par N. F. Talyzina.*

Université et emploi. Enquête sur les étudiants lillois de 1971 à 1977, par *Hubert Cukrowski.*

L'univers de la boutique. Famille et métier chez les petits patrons du Nord, par *François Grestle.*

Besoins de formation continue et crise économique. *Textes réunis par Claude Dubar.*

Les enquêtes en psychologie (2^e édition), par *Françoise Baucher.*

Mémoire et décision, par *Pierre Lecocq et Guy Tibergheim.*

Lise du plat pays, par *Lise Vandervelden.*

Rappel et reconnaissance. Encodage et recherche en mémoire, par *Guy Tibergheim et*

Pierre Lecocq.

Lire... Identifier..., comprendre, par *Joël Pynle.*

La femme transplante, par *Gabrielle Varro.*

A paraître

Il était une fois. *Textes réunis et présentés par G. Denhière.*

